№424

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n)!}$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{(2(n+1))!}*\frac{(2n)!}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{(2n+2)!}*\frac{(2n)!}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{(2n+1)(2n+2)3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{(4n^2+6n+2)3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^3+6n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}=0<1.$$

Следовательно ряд сходится.

№434

$$a_n=\frac{3^n*n!}{(n+1)^n}$$

Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$a_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n*n!}{(n+1)^n}\frac{(n+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}*\frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}*\frac{(n+2)}{(n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}*\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}*\frac{e^2}{e}*1=\frac{e}{3}$$

Следовательно, интервал сходимости ряда:

$$-\frac{e}{3}<x<\frac{e}{3}.$$

№444

$$f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x},\qquad b=0{,}5;\quad \varepsilon=0{,}001$$

Воспользуемся известным разложением в ряд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Тогда:

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots$$

Получаем:

$$\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)dx}{x}=\int_0^{0,5}\frac{1}{x}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots\right)dx=\int_0^{0,5}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}-\ldots\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{18}-\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=0{,}125-0{,}008+0{,}001=0{,}118.$$

454

$$y'=2e^y-xy;\qquad y(0)=0$$

Решение уравнения будем искать в виде

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

$$y(0)=0\Rightarrow a_0=0$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

Получаем уравнение:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots=2e^{(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)}-a_0x-a_1x^2-a_2x^3-\ldots$$

или

$$a_12a_2x+3a_3x^2+\ldots=2\left(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+\frac{1}{2!}(a_1x+a_2x^2+\ldots)^2+\ldots\right)-a_0x-a_1x^2-a_2x^3-\ldots$$

Получаем, что

$$a_1=2$$

$$2a_2=2a_1-a_0\Rightarrow a_2=a_1=1$$

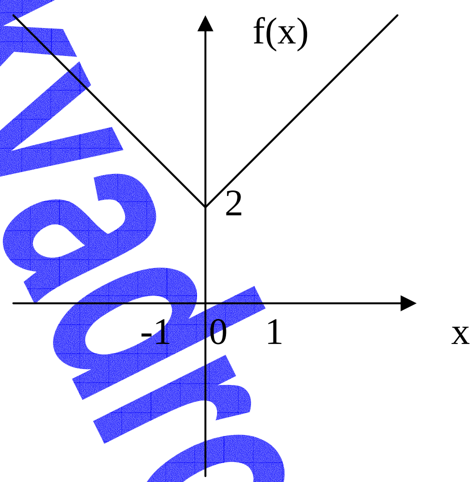
$$3a_3=2a_2+a_1^2-a_1\Rightarrow a_3=\frac{6}{3}=2$$

Решение имеет вид:

$$y=2x+2x^2+2x^3+\ldots$$

№464

f(x)=1+|x| (-1;1)



Данная функция является чётной на интервале (-1;1). Поэтому $b_m = 0$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 (1+x)dx = 2\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2*\frac{3}{2} = 3;$$

$$a_m = \int_{-1}^{1} f(x)\cos m\bar{n}xdx = 2\int_0^1 (1+x)\cos m\bar{n}xdx = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos m\bar{n}xdx \\ v = \dfrac{1}{m\pi}\sin m\pi x \end{array}\right] =$$

$$= 2\int_0^1 \cos m\pi xdx + 2\left(\frac{x}{m\pi}\sin m\pi x\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m\pi}\sin m\pi xdx\right) = \frac{2}{m\pi}\sin m\pi x\Bigg|_0^1 +$$

$$+2\left(\frac{1}{m\pi}\sin m\pi + \frac{1}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Bigg|_0^1\right) = \frac{2}{m^2\pi^2}((-1)^m - 1).$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m^2\pi^2}((-1)^m - 1)\cos m\pi x.$$