№427

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)*2^{n+1}}}*\frac{\sqrt{n2^n}}{(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)*\sqrt{n}*\sqrt{2^n}}{\sqrt{n+1}*\sqrt{2^n}*\sqrt{2}*(2n+1)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)}*\frac{(2n+3)}{(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}*\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7<1$$

$\Rightarrow$ ряд сходится.

№437

На границах интервала сходимости (т.е. в точках x=-1, x=1) члены ряда с точностью до знака имеют вид: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

А поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$ то в этих точках не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда, а потому в этих точках исследуемый ряд расходится.

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости. В точках $x_1=-1$, $x_2=1$ члены ряда с точностью до знака имеют вид: $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

А поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, то в этих точках не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда. Следовательно, в точках $x_1=-1$, $x_2=1$ исходный ряд расходится.

№447

$f(x)=arctgx^2;$ b = 0,5; $\int_0^b f(x)dx$ с точн. 0,001.

Используем разложение $f(x)$ в ряд Майклорена.

$x^2=t$

$\mathrm{arctgt}=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}....$

$\mathrm{arctgx}^2=x^2-\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}-\frac{x^{14}}{7}....$

Проинтегрируем $f(x)$.

$$\int_0^{0,5}\left(x^2-\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}-\frac{x^{14}}{7}....\right)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,5}-\frac{x^7}{21}\Bigg|_0^{0,5}+\frac{x^{11}}{55}\Bigg|_0^{0,5}-\frac{x^{14}}{7*14}\Bigg|_0^{0,5}....\approx\frac{0,5^3}{3}-\frac{0,5^7}{21}+\frac{0,5^{11}}{55}-...\approx$$

$\approx 0,04167-0,00037\approx 0,001\Rightarrow$ откинем этот и все последующие члены.

$=0,042.$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 10. Вариант 7. Номера 427, 437, 447, 457, 467

№457

$y'=x^2+y^2;$ $y(0)=2$

$$y=y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{y^n(0)}{n!}x^n$$

$y'(0)=0+2^2=4$

$y''(x)=2x+2yy'$

$y''(0)=2*2*4=16$

$y'''(x)=2+2y'y''+2y'^2$

$y'''(0)=2+2*2*16+2*4^2=264+32=98$

$$y=y(x)=2+4x+8x^2+\frac{130x^3}{6}+...\approx 2+4x+8x^2+\frac{49}{3}x^3+...$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С.
Контрольная работа 10. Вариант 7. Номера 427, 437, 447, 457, 467

№467

$$f(x) = |x| \qquad (-\pi;\pi)$$

$$l = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} * 2\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} * \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi$$

$$b_m = 0$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} * 2\int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{m} * \sin mx \bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{m} dx \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} x = v & dx = dv \\ \cos mx dx = dv & \frac{1}{m} * \sin mx = v \end{array} \right] = \frac{2}{m} * \sin m\pi + \frac{1}{m\pi}(\cos m\pi - 1) = \frac{1}{m\pi}\left((-1)^m - 1\right)$$

при $m = 2n$ $\qquad$ при $m = 2n - 1$

$$a_{2n} = 0 \qquad a_{2n-1} = \frac{-2}{(2n-1)\pi}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{m\pi x}{\pi}}{(2n-1)\pi} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(2n-1)x}{(2n-1)\pi}.$$

или

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \cos mx\, dx = \frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi} x d(\sin mx) =$$

$$= \frac{2}{m\pi} x \sin mx \bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi} \sin mx\, dx = \frac{2}{m^2\pi}\cos mx \bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{m^2\pi}\left((-1)^m - 1\right)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) \cdot \cos nx$$