№480

Методом Даланбера найти уравнение $U = U(x,t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, если в начальный момент $t_0 = 0$ форма струны и скорость точки струны абциссой x определяется соответственно заданными функциями:

$$U\Big|_{t_0=0} = f(x) = e^{-x} \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t_0=0} = F(x) = V_0$$

Решение: Воспользуемся формулой Даланбера:

$$U(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)dt$$

где коэффициент $a^2 = \frac{T_0}{S}$, тогда получаем:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(x-at)} + e^{-(x+at)}\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} V_0 dx = \frac{1}{2}(e^{-x} * e^{at} + e^{-x} * e^{-at}) + \frac{1}{2a}V_0 x\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(e^{at} + \frac{1}{e^{at}}\right) + \frac{V_0}{2a}(x + at - x + at) = \frac{e^{-x}(e^{2at}+1)}{e^{at}} + \frac{2V_0 at}{2a} = \frac{e^{-x}(e^{2at}+1)}{e^{at}} + V_0 * t.$$

№490

Представить заданную функцию $\omega = f(z)$, где $z = x + iy$ в виде $\omega = U(x,y) + iV(x,y)$; проверить будет ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке z_0 $\quad \omega = z * e^k \quad z_0 = -1 + i\pi.$

Решение: $z = x + iy$. Тогда $\omega = ze^z = (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x * e^{iy}$;

Представим $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Тогда $\omega = e^x(x+iy)e^{iy} = e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) =$

$= e^x(x\cos y + iy\sin y + iy\cos y + ix\sin y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y)$.

Окончательно $\omega = e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y)$, где $U(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$; $V(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$.

Для того, чтобы функция была аналитической долны выполнятся условия Коши - Римана, т.е. $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y);$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ - первое условие Коши - Римана выполняется, проверим второе условие:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(-\sin y - \sin y - y\cos y); \frac{\partial V}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y)$$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ - второе условие тоже выполняется, значит функция является аналитической и можно найти производную непосредственно:

$$\omega'(z) = (z * e^z)' = e^z + z * e^z = e^z(z+1)$$

$$\varpi'(z_0) = e^{-1+i\pi}(-1 + i\pi + 1) = i\pi e^{-1} * e^{i\pi} = \frac{i\pi}{e}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{i\pi}{e}$$

Ответ: $\omega'(z_0) = -\frac{i\pi}{e}$.

№500

Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$ в окрестности точки в $z_0=3$ ряд Лорана.

Найдем разложение функции f(z) в ряд Тейлоза

$$f(0)=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$$

$$f'(z)=\frac{-2}{(z-3)^3};\ f'(0)=\frac{2}{3^3};$$

$$f''(z)=\frac{2*3}{(z-3)^4};\ f''(0)=\frac{2*3}{3^4}$$

$$f'''(z)=\frac{-2*3*4}{(z-3)^5};\ f'''(0)=\frac{2*3*4}{3^5}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n(n+1)!}{(z-3)^{n+2}};\ f^{(n)}(0)=\frac{(n+1)!}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\frac{(n+1)!}{3^n}$$

Разложение имеет вид:

$$\frac{1}{(z-3)^2}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!3^n}z^n=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{3}\right)^n;$$

Радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=3$$

Ряд сходится в круге $(z)<3$.

№510

Методом операционного исчисления найти частное решение диффиренциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$x''+3x'+2x = 1+t+t^2; x(0)=0; x'(0)=1$

Решение: С помощью преобразования Лапласа и табличными изображениями элементарных функций перейдем к операторному уравнению:

$x(t) \to \bar{x}(p) \qquad x'(t) \to p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x}(p)$

$x''(t) \to p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x}(p) - 1$

$$1+t+t^2 \to \frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}$$

Операторное уравнение запишется так:

$$\bar{x}(p)(p^2+3p+2) = \frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+1 = \frac{p^3+p^2+p+2}{p^3}$$

$$\bar{x}(p) = \frac{p^3+p^2+p+2}{p^3(p^2+3p+2)} = \frac{p^3+p^2+p+2}{p^3(p+1)(p+2)}$$

Разложим дробь на простейшие дроби и используя метод на определенных коэффициентов найдем коэффициенты:

$$\frac{p^3+p^2+p+2}{p^3(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p+1}+\frac{E}{p+2} = \frac{A(p+1)(p+2)+Bp(p+1)(p+2)+Cp^2(p+1)x}{p^3(p+3)(p+2)}$$

$x(p+2)+Dp^3(p+2)+Ep^3(p+1)$

Приравниваем числители:

$$p^3+p^2+p+2 = A(p+1)(p+2)+Bp(p+1)(p+2)+Cp^2(p+1)(p+2)+Dp^3(p+2)+Ep^3(p+1) =$$
$$= A(p^2+3p+2)+B(p^3+3p^2+2p)+C(p^4+3p^3+2p^2)+D(p^4+2p^3)+E(p^4+p^3) =$$
$$= p^4(C+D+E)+p^3(B+3C+2D+E)+p^2(A+3B+2C)+p(3A+2B)+p^0(2A)$$

При $p=1$ получим: $6A+6B+6C+3D+2E=6$ или $6+6B+6C-3-1=5$

окончательно $6B+6C=3 \Rightarrow 2B+2C=1$

При $p=2$ получаем: $12+24B+48C-32-12=16$ или

$24B+48C=48 \Rightarrow B+2C=2$

$$\begin{array}{l|c}
p^0 & 2A=2 \\
p^1 & 3A+2B=1 \\
p^2 & A+3B+2C=1 \\
p^3 & B+3C+2D+E=1 \\
p^4 & C+D+E=0\,|(-1)
\end{array}$$

$$A=1$$
$$3*1+2B=1$$
$$2B=-2$$
$$B=-1$$
$$1+3(-1)+2C=1$$
$$-2+2C=1$$
$$2C=3$$
$$C=\tfrac{2}{3}$$
$$B+2C+D=1$$
$$-1+2\tfrac{2}{3}+D=1$$
$$-1+3+D=1 \qquad D=-1$$
$$\tfrac{3}{2}-1+E=0 \qquad E=-\tfrac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2B + 2C = 1 \\ B + 2C = 2 \end{cases} \quad \text{Получаем: } B = -1, \ C = \frac{3}{2}$$

Тогда уравнение запишется так:

$$\bar{x}p = \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{p^3(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{3}{2} * \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} * \frac{1}{p+2}$$

Найдем оригиналы по таблице изображений:

$$\frac{1}{p+1} \leftarrow e^{-t}; \frac{1}{p+2} \leftarrow e^{-2t}; \frac{1}{p} \leftarrow 1; \frac{1}{p^2} \leftarrow t; \frac{1}{p^3} \leftarrow \frac{1}{2} t^2$$

Тогда частное решение запишется так:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \quad \text{окончательно}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 3 - 2e^{-t} - e^{-2t}).$$

№520

Методом отрицательного исчисления: найти частное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданием начальным условиям:

$$\begin{cases} x'+y=0 & x(0)=1 \\ y'-2x-2y=0 & y(0)=1 \end{cases}$$

Решение: Перепишем систему в операторной форме:

$x(t)\to\bar{x}(p)$ $\quad x'(t)\to p\bar{x}(p)-x(0)=p\bar{x}(p)-1$

$\mathrm{y(t)}\to\bar{y}(p)$ $\quad y'(t)\to p\bar{y}(p)-y(0)=p\bar{y}(p)-1$

Система уравнений перепишется так: $\begin{cases} p\bar{x}(p)+\bar{y}(p)=1 \\ p\bar{y}(p0-2\bar{x}(p)-2\bar{y}(p)=1 \end{cases}$

Перепишем систему уравнений так:

$$\begin{cases} p\bar{x}(p)+\bar{y}(p)=1 \\ p\bar{y}(p0-2\bar{x}(p)-2\bar{y}(p)=1 \end{cases}$$

Решим алгебраическую систему уравнений по формуле Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & p-2 \end{vmatrix}=p(p-2)+2=p^2-2p+2;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix}=p-2-1=p-3;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=p+2;$$

$$\bar{x}(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p-3}{p^2-2p+2}; \qquad \bar{y}(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p+2}{p^2-2p+2}$$

Тогда $\quad \bar{\mathrm{x}}(\mathrm{p})=\frac{p-3}{p^2-2p+2}=\frac{p-1-2}{(p-1)^2+1}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-2\frac{1}{(p-1)^2+1}$

Найдем по таблице x(t)

$\mathrm{x(t)}=\mathrm{e}^t\cos t-2e^t\sin t$

$$\bar{y}(p)=\frac{p+2}{(p-1)^2+1}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{3}{(p-1)^2+1}$$

Найдем по таблице y(t)

$\mathrm{y(t)}=\mathrm{e}^t\cos t+3e^t\sin t.$