http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 0. Номера 380, 390, 400, 410

№380

$y^6 = a^2(x^2+y^2)(3y^2-x^2)$

Прейдём к полярным коодинатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Получим:

$r^6\sin^6\varphi = a^2(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)(3r^2\sin^2\varphi - r^2\cos^2\varphi)$

$r^6\sin^6\varphi = a^2 r^4(3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$

$r^2\sin^6\varphi = a^2(3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$

$$r = a\frac{\sqrt{3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}}{\sin^3\varphi}$$

$$S = \int_{\varepsilon}^{\beta} d\varphi \int_{f_1}^{f_2} r dr$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{0}^{a\frac{\sqrt{3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{\sin^3\varphi}} r dr$$

$$S = \iint dxdy = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{0}^{a\frac{\sqrt{3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{\sin^3\varphi}} pdp = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \frac{p^2}{2}\Bigg|_0^{a\frac{\sqrt{3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}{\sin^3\varphi}} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{a^2(3\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{\sin^6\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \frac{3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} * \frac{1}{\sin^2\varphi} * \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2(3 - ctg^2\varphi)(1 + ctg^2\varphi)(-dctg\varphi) =$$

$$\left| \begin{array}{l} ctg\varphi = t \\ t_1 = ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ t_2 = ctg\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$2\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} a^2(3-t^2)(1+t^2)(-dt) = 2a^2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3+2t^2-t^4)dt = 2a^2\left(3t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2a^2\left(\left(3\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right) + \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^3 - \left(-\sqrt{3}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{3}\right)^5 - \left(-\sqrt{3}\right)^5\right)\right)\right)\right) = 2a^2\sqrt{3}\left(6 + \frac{4}{3}3 - \frac{1}{5}9\right) =$$

$$= 2a^2\sqrt{3}\left(10 - \frac{9}{5}\right) = \frac{82a^2\sqrt{3}}{5}$$

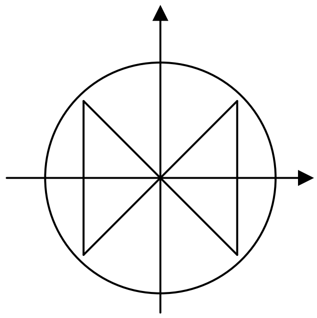
$3\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \ge 0$

$3tg^2\varphi - 1 \ge 0$

$tg^2\varphi \ge \frac{1}{3}$

$|tg\varphi| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

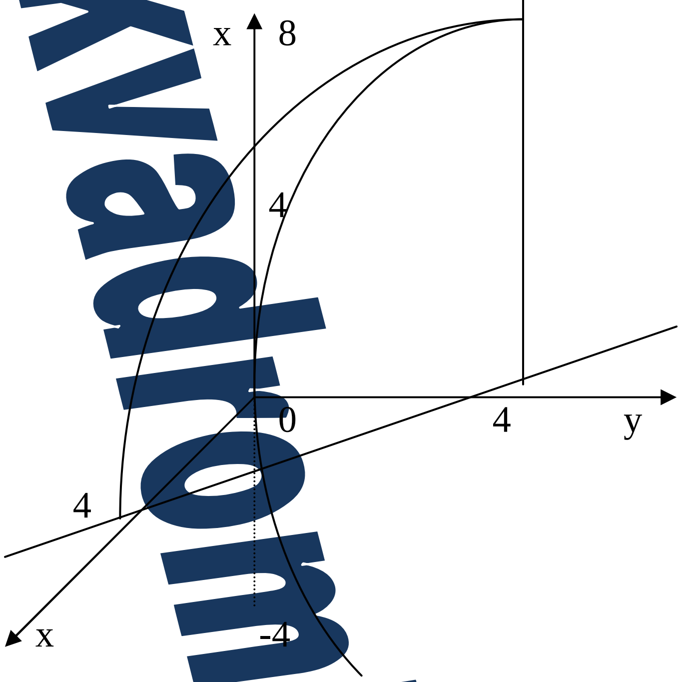
$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$



http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 0. Номера 380, 390, 400, 410

№390

$z=0, \quad z=4\sqrt{y}, \quad x=0, \quad x+y=4$



$$V=\iiint_T dxdydz=\int_0^4 dx\int_0^{4-x} dy\int_0^{4\sqrt{y}} dz=\int_0^4 dx\int_0^{4-x} 4\sqrt{y}\,dy=4\int_0^4 \sqrt{y^3}\,\frac{2}{3}\Big|_0^{4-x} dx=\frac{8}{3}\int_0^4\sqrt{(4-x)^3}\,dx=$$

$$=-\frac{8}{3}\int_0^4\sqrt{(4-x)^3}\,d(4-x)=-\frac{8}{3}\sqrt{(4-x)^5}\,\frac{2}{5}\Big|_0^4=-\frac{16}{15}(0-2^5)=\frac{16}{15}*32=\frac{512}{15}=34\frac{2}{15}(куб.ед.).$$

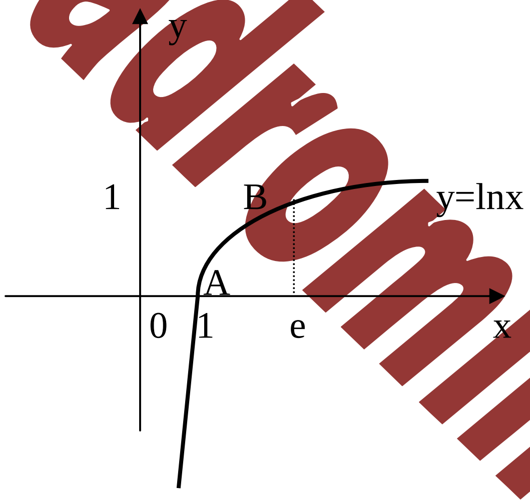
№400

$$\int_L \frac{y}{x}dx + xdy$$

$L: y = \ln x \quad A(1;0), \quad B(e;1)$

Чертёж:

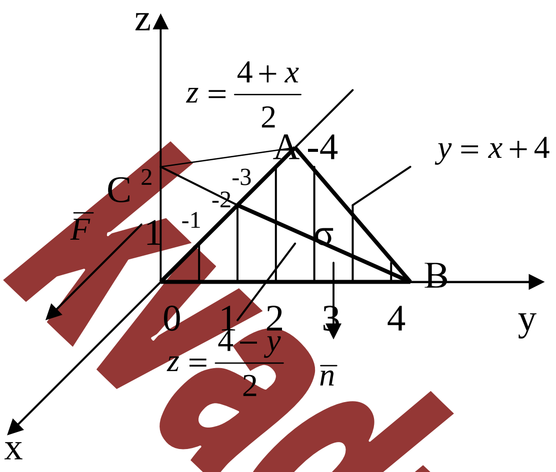
$$y' = \frac{1}{x}$$



$$\int_L \frac{y}{x}dx + xdy = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}x\right)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e dx = \int_1^e \ln x\, d\ln x + x\Big|_1^e = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e + e - 1 = \frac{1}{2} - 0 - 1 =$$

$$= e - \frac{1}{2} = 2{,}22.$$

№410



Векторная функция: $\overline{F}=(x-8y+6z)\overline{i}$;

Плоскость: $P: -x+y+2z-4=0$;

Векторная функция $\overline{F}$ направлена вдоль оси x.

1. Поток вектора $\overline{F}$ через поверхность σ

$$\Phi=\iint_{\sigma}(Pdydz+Qdxdz+Rdxdy)=\iint_{\sigma}F_x\,dydz=0;$$

Поскольку вектор нормали $\overline{n}$ к поверхности σ перпендикулярен $\overline{F}$;

2. Циркуляция вектора $\overline{F}$ по контуру λ. Непосредственное вычисление.

$$C=\oint_{\lambda}(Pdx+Qdy+Rdz)=\oint_{\lambda}(x-8y+6z)dx$$

Контур λ состоит из трёх отрезков: OA, AB и BO.

$$C=\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO};$$

1. Отрезок OA. $z=0,\quad y=0$

$$-\int_{0}^{-4}xdx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{-4}=-8;$$

2. Отрезок AB $z=0,\quad y=x+4$

$$-\int_{-4}^{0}(x-8(x+4))dx=\int_{-4}^{0}(7x+32)dx=\left[x\left(\frac{7x}{2}+32\right)\right]_{-4}^{0}=4\left(-\frac{28}{2}+32\right)=72;$$

3. Отрезок BO: $\int_{BO}=0;$

$$C=72-8=64;$$

3. Циркуляция вектора $\overline{F}$. Теорема Стокса.

$$C=\oint Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S}(\overline{n},rot\overline{F})dS;$$

Вычисляем вектор $rot\overline{F}$:

$$rot\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-8y+6z & 0 & 0\end{vmatrix}=6\overline{j}+8\overline{k};$$

$$C=\iint_{S}(rot\overline{F})_z\,dxdy=8\int_{-4}^{0}dx\int_{0}^{x+4}dy=8\int_{-4}^{0}(x+4)dx=8\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-4}^{0}=-8\left(\frac{16}{2}-4*4\right)=64.$$

4. Поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность пирамиды. Теорема Остроградского - Гаусса.

$$\varPhi = \oiint_S \overline{F} dS = \iiint_V div\overline{F} dV;$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1;$$

$$\varPhi = \int_{-4}^{0} dx \int_{0}^{x+4} dy \int_{0}^{\frac{4+x-y}{2}} dz = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} dx \int_{0}^{x+4} (4+x-y)dy = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}\left[(x+4)y - \frac{y^2}{2}\right]dy = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(x+4)^2 dx = \left.\frac{(x+4)^3}{12}\right|_{-4}^{0} = 5{,}33;$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением.

$$\varPhi = \oiint_S (\overline{F}, \overline{n})dS = \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC};$$

Поток вектора $\overline{F}$ через грани OAC и OAB равен 0, поскольку вектор нормали $\overline{n} \perp \overline{F}$.

$$\varPhi_1 = \iint_{OBC} = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{4-y}{2}} (6z - 8y)dz = 2\int_0^4 dy \int_0^{\frac{4-y}{2}} (3z - 4y)dz = 2\int_0^4 dy \left.\left(\frac{3z^2}{2} - 4yz\right)\right|_0^{\frac{4-y}{2}} = \int_0^4 \left(3\frac{(4-y)^2}{4} - 8y\frac{4-y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 (4-y)(3(4-y) - 15y)dy = \frac{1}{4}\int_0^4 (4-y)(12-19y)dy = \frac{1}{4}\int_0^4 (48 - 88y + 19y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left.\left(48y - 44y^2 + \frac{19}{3}y^3\right)\right|_0^4 = \frac{1}{4}(192 - 704 + 405{,}3) = -26{,}7;$$

$$\varPhi_2 = \iint_{ABC} = -\int_0^4 dy \int_0^{\frac{4-y}{2}} (y + 2z - 4 - 8y + 6z)dz = -\int_0^4 dy \int_0^{\frac{4-y}{2}} (8z - 7y - 4)dz = -\int_0^4 dy\left[4\frac{(4-y)^2}{4} - (4+7y)\frac{(4-y)}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^4 (4-y)[2(4-y) - 4 - 7y]dy = -\frac{1}{2}\int_0^4 (4-y)(4-9y)dy = -\frac{1}{2}\int_0^4 (16 - 40y + 9y^2)dy =$$

$$= -\frac{1}{2}y(16 - 40y + 9y^2)dy = -\frac{1}{2}y(16 - 20y + 3y^2)\Big|_0^4 = -2(16 - 80 + 3*16) = 32$$

$$\varPhi = \varPhi_1 + \varPhi_2 = 32 - 26{,}7 = 5{,}3.$$

№420

$$\overline{F} = (9x+5yz)\bar{i} + (9y+5xz)\bar{j} + (9z+5xy)\bar{k}$$

$$\overline{rot\overline{F}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (9x+5yz) & (9y+5xz) & (9z+5xy) \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial(9z+5xy)}{\partial y} - \frac{\partial(9y+5xz)}{\partial z}\right) -$$

$$-\bar{j}\left(\frac{\partial(9y+5xy)}{\partial x} - \frac{\partial(9x+5yz)}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial(9y+5xz)}{\partial x} - \frac{\partial(9x+5yz)}{\partial y}\right) = \bar{i}(5x-5x) - \bar{j}(5y-5y) +$$

$$+\bar{k}(5z-5z) = 0$$

Следовательно, данное векторное поле $\overline{\mathrm{F}}$ является потенциальным. Найдём его потенциал по формуле:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C, \text{ т.е.}$$

$$u(x,y,z) = \int_0^x 9xdx + \int_0^y 9ydy + \int_0^z (9z+5xy)dz + C = \frac{9x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} + \frac{9z^2}{2} + 5xyz;$$

Здесь, в качестве начальной точки взята точка $M_0(0;0;0)$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (9x+5xz)'_x = 9$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (9y+5xz)'_y = 9$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = (9z+5xy)'_z = 9$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 9+9+9 = 27 \neq 0$$

Следовательно, векторное поле $\overline{\mathrm{F}}$ не является соленоидальным.