

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 3. Контрольная работа 1.

**Задачи 8, 18, 28, 38, 48.**

[http://www.kvadromir.com/arutunov\\_sbornik.html](http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html)

### №8

$\bar{a}(1,4,3); \bar{b}(6,8,5); \bar{c}(3,1,4); \bar{d}(21,18,33)$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 60 + 18 - 72 - 5 - 96 = -63 \neq 0$$

Смешанное произведение векторов не равно нулю, следовательно, векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , образуют базис. Найдём координаты вектора  $\bar{d}$  в этом базисе по формулам:

$$\begin{cases} a_1 e_1^1 + a_2 e_2^1 + a_3 e_3^1 = \alpha_1 \\ a_1 e_1^2 + a_2 e_2^2 + a_3 e_3^2 = \alpha_2 \\ a_1 e_1^3 + a_2 e_2^3 + a_3 e_3^3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Подучаем:

$$\begin{cases} a_1 + 6a_2 + 3a_3 = 21 \\ 4a_1 + 8a_2 + a_3 = 18 \\ 3a_1 + 5a_2 + 4a_3 = 33 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 18 + 60 - 72 - 5 - 96 = -63$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 6 & 3 \\ 18 & 8 & 1 \\ 33 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 672 + 198 + 270 - 792 - 105 - 432 = -189$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 3 \\ 4 & 18 & 1 \\ 3 & 33 & 4 \end{vmatrix} = 72 + 63 + 396 - 162 - 33 - 336 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 4 & 8 & 18 \\ 3 & 5 & 33 \end{vmatrix} = 264 + 324 + 420 - 504 - 90 - 792 = -378$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-189}{-63} = 3; \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-63} = 0; \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-378}{-63} = 6$$

Координаты вектора  $\bar{d}$  в базисе  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ :

(3;0;6)

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 3. Контрольная работа 1.

**Задачи 8, 18, 28, 38, 48.**

[http://www.kvadromir.com/arutunov\\_sbornik.html](http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html)

**№18**

$A_1(7,2,2); A_2(5,7,7); A_3(5,3,1); A_4(2,3,7)$

1) Длина ребра  $A_1A_2$  :

$$|A_1A_2| = \sqrt{(5-7)^2 + (7-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{4+25+25} = \sqrt{54}$$

2) Угол между рёбрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4}}{|A_1A_2| * |A_1A_4|}$$

$$\overline{A_1A_2} = (5-7; 7-2; 7-2) = (-2; 5; 5)$$

$$\overline{A_1A_4} = (2-7; 3-2; 7-2) = (-5; 1; 5)$$

$$\overline{A_1A_2} * \overline{A_1A_4} = -2(-5) + 5*1 + 5*5 = 10 + 5 + 25 = 40$$

$$|A_1A_4| = \sqrt{25+1+25} = \sqrt{51}$$

$$\cos \alpha = \frac{40}{\sqrt{54} * \sqrt{51}} \approx \frac{40}{7,35 * 7,14} = 0,76$$

$$\alpha = \arccos(0,76) \approx 0,7041 \text{ рад.}$$

3)  $\sin A_1A_4 \quad A_1A_2A_3 = \frac{\overline{A_1A_4} * \vec{n}}{|A_1A_4| * |\vec{n}|}$

$$\overline{A_1A_4} = (-5; 1; 5)$$

$$\vec{n} = \overline{[A_1A_2 * A_1A_3]}$$

$$\overline{A_1A_2} = (-2; 5; 5)$$

$$\overline{A_1A_3} = (5-7; 3-2; 1-2) = (-2; 1; -1)$$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = i(-5-5) - j(2+10) + k(-2+10) = -10i - 12j + 8k$$

$$\vec{n} = (-10; -12; 8)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-10)^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{100+144+64} = \sqrt{308}$$

$$\overline{A_1A_4} * \vec{n} = (-5)(-10) + 1(-12) + 5*8 = 50 - 12 + 40 = 78.$$

$$\sin A_1A_4 \quad A_1A_2A_3 = \frac{78}{\sqrt{51}\sqrt{308}} = 0,6223$$

$$A_1A_4 \quad A_1A_2A_3 \quad \arcsin 0,6223 = 51^\circ 31'$$

<http://www.kvadromir.com> - физика и математика для заочников

5) Объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{6} |\overline{A_1 A_2} * \overline{A_1 A_3} * \overline{A_1 A_4}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-10 + 25 - 10 + 25 - 2 + 50) = \frac{78}{6} = 13 (\text{куб.ед.})$$

6) Уравнение прямой  $A_1 A_2$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Получаем  $\frac{x-7}{5-7} = \frac{y-2}{7-2} = \frac{z-2}{7-2}$  или

$$A_1 A_2: \frac{x-7}{-2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-2}{5}$$

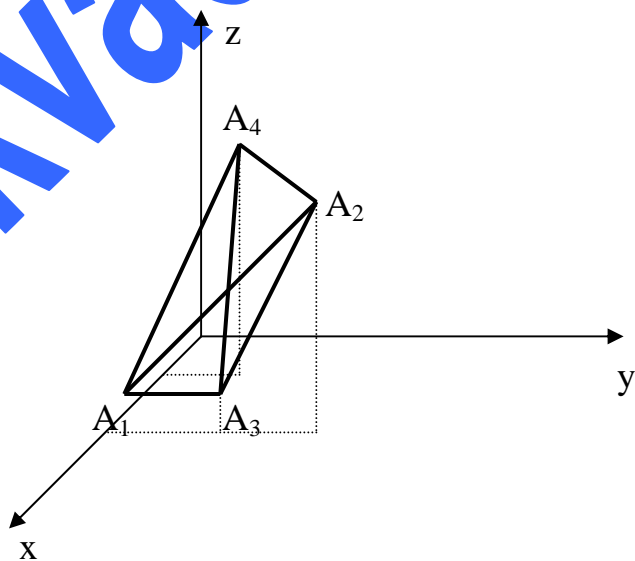
8) Уравнение высоты:

$$\frac{x - x_4}{l} = \frac{y - y_4}{m} = \frac{z - z_4}{n}, \text{ где}$$

$$l = A = -5; m = B = -6; n = 1 = 4$$

В силу перпендикулярности прямой и плоскостью. Получаем уравнение высоты:

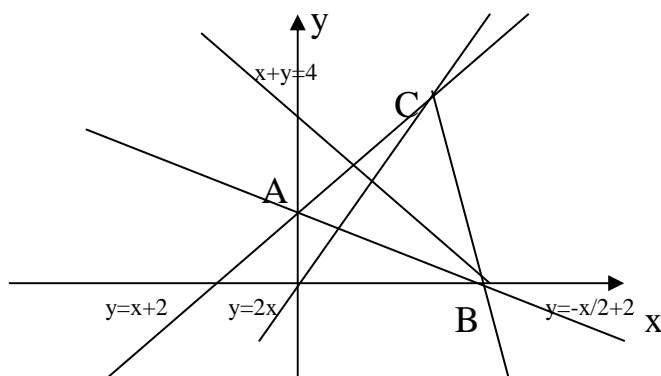
$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{4}$$



**Задачи 8, 18, 28, 38, 48.**

[http://www.kvadromir.com/arutunov\\_sbornik.html](http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html)

**№28**



Найдём уравнение стороны АВ, как прямой перпендикулярной высоте  $y = 2x$ . Будем искать это уравнение прямой в виде  $y = kx + b$ .

Т.к. прямая АВ и высота  $y = 2x$  перпендикулярны, то  $k = \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + b$ .

Т.к. точка А лежит на искомой прямой, то  $2 = -\frac{0}{2} + b \Rightarrow b = 2$

Уравнение АВ:  $y = -\frac{x}{2} + 2$

Аналогично рассуждая, найдём уравнение стороны АС, как прямой, перпендикулярной высоте

$$y = 4 - x$$

$$k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{(-1)} = 1 \Rightarrow y = x + b: 2 = 0 + b \Rightarrow b = 2$$

Уравнение АС:  $y = x + 2$

Найдём координаты точки С, как точки пересечения прямой  $y = x + b$  с прямой  $y = 2x$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x = x + 2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \end{matrix} \quad C = (2; 4)$$

Найдём координаты точки В, как точки пересечения прямой  $y = -\frac{x}{2} + 2$  и  $x + y = 4$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x - \frac{x}{2} + 2 = 1 \\ \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{matrix} \quad y = -\frac{4}{2} + 2 = 0 \Rightarrow B(4; 0)$$

Находим уравнение стороны ВС, как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 4}{2 - 4} = \frac{y - 0}{4 - 0} \Rightarrow \frac{x - 4}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow 2x - 8 = -y \quad \text{или}$$

$$BC: y = -2x + 8.$$

Высшая математика. Методические указания и контрольные задания. Под редакцией Ю.С. Арутюнова. Вариант 3. Контрольная работа 1.

**Задачи 8, 18, 28, 38, 48.**

[http://www.kvadromir.com/arutunov\\_sbornik.html](http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html)

**№38**

Ось ординат :  $x = 0$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

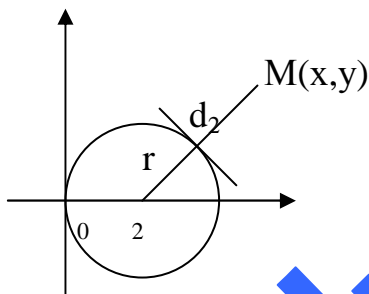
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Пусть  $M(x; y)$  - произвольная точка искомой кривой. Тогда расстояние от  $M$  до оси ординат равно.

$$d_1 = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1 \cdot x + 0 \cdot y + 0}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = x$$

Расстояние от  $M$  до окружности



$$|MO| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$d_2 = |MO| - r = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$$

По условию задачи:

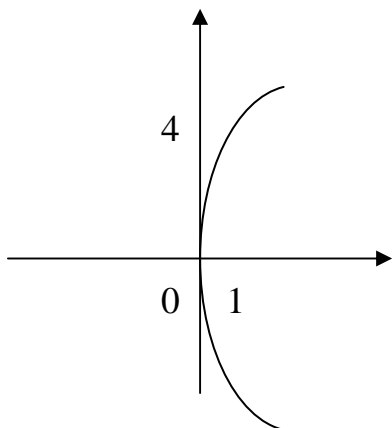
$$d_1 = d_2$$

$$x = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$$

$$(x+2)^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$x^2 + 21x + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$y^2 = 8x - \text{это парабола}$$



**Задачи 8, 18, 28, 38, 48.**

[http://www.kvadromir.com/arutunov\\_sbornik.html](http://www.kvadromir.com/arutunov_sbornik.html)

**№48**

$$r = \frac{3}{1 - 2 \cos \phi}$$

1) Строим линию по точкам:

$\phi$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	$\pi$	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	$2\pi$
$\cos \phi$	0,92	0,71	0,38	0	-0,38	-0,71	-0,92	-1	-0,92	-0,71	-0,38	0	0,38	0,71	0,92	1
$2 \cos \phi$	1,85	1,41	0,77	0	-0,77	-1,41	-1,85	-2	-1,85	-1,41	-0,77	0	0,77	1,41	1,85	2
$1 - 2 \cos \phi$	-0,85	-0,41	0,23	1	1,77	2,41	2,85	3	2,85	2,41	1,77	1	0,23	-0,41	-0,85	-1
$\frac{3}{1 - 2 \cos \phi}$	-3,5	-7,3	13	3	1,7	1,2	1,05	1	1,05	1,2	1,7	3	13	-7,3	-3,5	-3

$$2) \begin{cases} x = r \cos \phi & x^2 + y^2 = r^2 \\ y = r \sin \phi & r \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{3}{1 - 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2x} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 + 12x + 4x^2$$

$$3x^2 + 12x + 9 = y^2$$

$$y^2 = 3(x^2 + 4x) + 9$$

$$y^2 = 3(x+2)^2 = 12 + 9$$

$$y^2 = 3(x+2)^2 - 3$$

$$3(x+2)^2 - y^2 = 3$$

$$(x+2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1 - \text{гипербола.}$$

