Решения задач из сборника Чертова А. Г.
Номера 610, 620, 630, 640, 650, 660, 680.

610

Фотон выбивает из атома водорода, находящегося в основном состоянии, электрон с кинетической энергией T=10 эВ. Определить энергию ε фотона.

Дано: $T = 10 эВ = 1,6 \cdot 10^{-18}\ Дж$
Найти: $\varepsilon = ?$

Решение

По закону сохранения энергии

$$\varepsilon = E_i - T\ .$$

Где $E_i = 13,6 эВ = 2,18 \cdot 10^{-19}\ Дж$ — энергия ионизации водорода. Следовательно,

$$\varepsilon = E_i - T = 13,6 эВ - 10 эВ = 3,6 эВ = 5,8 \cdot 10^{-19}\ Дж\ .$$

Ответ: $\varepsilon = 3,6 эВ = 5,8 \cdot 10^{-19}\ Дж$.

620

Кинетическая энергия T электрона равна удвоенному значению его энергии покоя ($2m_0c^2$). Вычислить длину волны λ де Бройля для такого электрона.

Дано: $T = 2m_0c^2$.
Найти: $\lambda = ?$

Решение

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \qquad (1)$$

Импульс электрона

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T}\ .$$

По условию кинетическая энергия равна $T = 2m_0c^2$. По определению энергия покоя равна $E_0 = m_0c^2$. Подставим эти значения в последнюю формулу

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{\left(2m_0c^2 + 2m_0c^2\right)2m_0c^2}\ .$$

После преобразования получим

$$p = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot m_0 c^2 = 2\sqrt{2} \cdot m_0 c.$$

Подставим найденное значение импульса в формулу (1). Получим

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{2\sqrt{2} m_0 c} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2} m_0 c}.$$

Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*. Постоянная Планка $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ *Дж·с*. Подставляем значения в формулу

$$\lambda = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2} m_0 c} = \frac{\pi \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с}{\sqrt{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} кг \cdot 3 \cdot 10^8\ м/с} = 8{,}53 \cdot 10^{-13} м = 0{,}853 пм.$$

Сделаем проверку размерности

$$[\lambda] = \left[\frac{Дж \cdot с}{кг \cdot м/с} = \frac{Н \cdot м \cdot с^2}{кг \cdot м} = \frac{Н \cdot с^2}{кг} = \frac{кг \cdot \frac{м}{с^2} \cdot с^2}{кг} = \frac{кг \cdot м}{кг} = м \right]$$

Ответ: $\lambda = 0{,}853 пм$.

630

Для приближенной оценки минимальной энергии электрона в атоме водорода можно предположить, что неопределенность Δr радиуса r электронной орбиты и неопределенность Δp импульса p электрона на такой орбите соответственно связаны следующим образом: Δr≈r и Δp≈p. Используя эти связи, а также соотношение неопределенностей, определить минимальное значение энергии T_{min} электрона в атоме водорода.

Дано: $\Delta r = r; \quad \Delta p = p$.

Найти: $T_{\min} = ?$

Решение

Соотношение неопределённостей для импульса и координаты $\Delta x \Delta p \ge \hbar$.

Неопределённость координаты $\Delta x = \frac{d}{2} = \Delta r = r$. Поэтому $\Delta r \Delta p \ge \hbar$ или $\Delta p \ge \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{\hbar}{r}$.

Из условия задачи следует $p \ge \frac{\hbar}{r}$.

Импульс связан с кинетической энергией соотношением

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2mT} \ge \frac{\hbar}{r},$$

и

$$2mT \geq \left(\frac{\hbar}{r}\right)^2.$$

Разделив на $2m$, получим

$$T \geq \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{r}\right)^2.$$

Отсюда, переходя к равенству, получим

$$T_{\min} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{r}\right)^2.$$

Примем $r = a = 0,529 \cdot 10^{-10}\,м$ — радиус Бора. Получим

$$T_{\min} = \frac{1}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}\,кг}\left(\frac{1,05 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с}{0,529 \cdot 10^{-10}\,м}\right)^2 = 2,16 \cdot 10^{-18}\,Дж = 13,51 эВ.$$

Сделаем проверку размерности

$$[T_{\min}] = \left[\frac{1}{кг}\left(\frac{Дж \cdot с}{м}\right)^2 = \frac{Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot м^2} = \frac{Н^2 \cdot м^2 \cdot с^2}{кг \cdot м^2} = \frac{Н^2 \cdot с^2}{кг} = \frac{Н \cdot Н \cdot с^2}{кг}\right] =$$

$$= \left[\frac{Н \cdot кг \cdot \frac{м}{с^2} \cdot с^2}{кг} = Н \cdot м = Дж = эВ\right]$$

Ответ: $T_{\min} = 2,16 \cdot 10^{-18}\,Дж = 13,51 эВ$.

http://www.kvadromir.com

640

Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид

$\Psi(r) = Ae^{-r/a_0}$,

где А– некоторая постоянная; a_0 – первый боровский радиус. Найти для основного состояния атома водорода среднее значение <П> потенциальной энергии.

Дано: $\psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$.

Найти: $< П > = ?$.

Решение

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - П)\psi(x) = 0.$$

Принимая $x = r$, перепишем уравнение Шредингера в виде

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-П)\psi(r)=0. \qquad (1)$$

По условию $\psi(r)=Ae^{-\frac{r}{a_0}}$. Дифференцируем эту функцию дважды по r. Получим

$$\frac{d\psi}{dr}=-\frac{A}{a_0}e^{-\frac{r}{a_0}}, \qquad \frac{d^2\psi}{dr^2}=\frac{A}{a_0^2}e^{-\frac{r}{a_0}}.$$

Подставим функцию $\psi(r)$ и её вторую производную в уравнение (1). Получим

$$\frac{A}{a_0^2}e^{-\frac{r}{a_0}}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-П)Ae^{-\frac{r}{a_0}}=0,$$

или

$$Ae^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{1}{a_0^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-П)\right)=0.$$

Но $Ae^{-\frac{r}{a_0}}\neq 0$, следовательно,

$$\frac{1}{a_0^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-П)=0.$$

Отсюда

$$П=\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}+E. \qquad (2)$$

Здесь $E=2{,}18\cdot10^{-18}\,Дж$ — энергия электрона в основном состоянии, $\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}\,Дж\cdot с$ — постоянная Планка, $m=9{,}11\cdot10^{-31}\,кг$ — масса электрона, $a_0=0{,}529\cdot10^{-10}\,м$ — радиус орбиты основного состояния. Подставим эти значения в формулу (2)

$$П=\frac{\left(1{,}05\cdot10^{-34}\,Дж\cdot с\right)^2}{2\cdot9{,}11\cdot10^{-31}\,кг\cdot\left(0{,}529\cdot10^{-10}\,м\right)^2}+2{,}18\cdot10^{-18}\,Дж=4{,}34\cdot10^{-18}\,Дж.$$

Сделаем проверку размерности

$$[П]=\left[\frac{(Дж\cdot с)^2}{кг\cdot м^2}+Дж=\frac{Дж^2\cdot с^2}{кг\cdot м^2}+Дж=\frac{Дж^2}{кг\cdot\frac{м^2}{с^2}}+Дж=\frac{Дж^2}{Дж}+Дж=Дж+Дж=Дж\right]$$

Ответ: $П=4{,}34\cdot10^{-18}\,Дж$.

650

Из каждого миллиона атомов радиоактивного изотопа каждую секунду распадается 200 атомов. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Дано: $N = 10^6$, $\Delta N = 200$, $\Delta t = 1c$.
Найти: $T_{1/2} = ?$.

Решение

Закон радиоактивного распада

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

Здесь $\lambda = \dfrac{0,693}{T_{1/2}}$ — постоянная распада. Таким образом, $\Delta N = \dfrac{0,693}{T_{1/2}} N \Delta t$. Отсюда

$$T_{1/2} = \frac{0,693 N \Delta t}{\Delta N}.$$

Подставим исходные данные

$$T_{1/2} = \frac{0,693 \cdot 10^6 \cdot 1c}{200} = 3465c = 58мин.$$

Ответ: $T_{1/2} = 58мин$.

660

Определить скорости продуктов реакции ^{10}B(n,α)^{7}Li, протекающей в результате взаимодействия тепловых нейтронов с покоящимися ядрами бора.

Дано: $^{10}B(n,\alpha)\ ^7Li$.
Найти: v_{Li}, $v_{He} = ?$.

Решение

Реакция

$$^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n \to ^{7}_{3}Li + ^{4}_{2}He.$$

Пренебрегая скоростью тепловых нейтронов, получим из закона сохранения импульса

$$m_{Li} v_{Li} + m_{He} v_{He} = 0.$$

Здесь m_{Li}, v_{Li} — масса и скорость ядра атома лития, m_{He}, v_{He} — масса и скорость ядра атома гелия. Отсюда

$$v_{Li} = -\frac{m_{He} v_{He}}{m_{Li}} = -\frac{4 v_{He}}{7} = -\frac{4}{7} v_{He}. \quad (1)$$

Полная кинетическая энергия продуктов распада

$$T=\frac{m_{Li}\left(v_{Li}\right)^2}{2}+\frac{m_{He}\left(v_{He}\right)^2}{2}.$$

Учитывая выражение скорости для ядра атома лития (1), последнее равенство перепишем в виде

$$T=\frac{\frac{7}{4}m_{He}\left(-\frac{4}{7}v_{He}\right)^2}{2}+\frac{m_{He}\left(v_{He}\right)^2}{2}=\left(\frac{4}{7}+1\right)\frac{m_{He}\left(v_{He}\right)^2}{2}=\frac{11}{7}\cdot\frac{m_{He}\left(v_{He}\right)^2}{2}.$$

Разница масс

$$\Delta m=m_B+m_n-m_{Li}-m_{He}=\left(10,013+1,009-7,016-4,003\right)\cdot 1,66\cdot 10^{-27}\,кг=4,98\cdot 10^{-30}\,кг.$$

Выделяющаяся энергия $E=\Delta mc^2$. По закону сохранения энергии $T=E$ или

$$\frac{11}{7}\cdot\frac{m_{He}\left(v_{He}\right)^2}{2}=\Delta m\cdot c^2.$$

Отсюда

$$v_{He}=\sqrt{\frac{14}{11}\cdot\frac{\Delta m\cdot c^2}{m_{He}}}.$$

Подставим в последнее выражение значения $\Delta m,\ \ m_{He}$. Получим

$$v_{He}=\sqrt{\frac{14}{11}\cdot\frac{4,98\cdot 10^{-30}\,кг\cdot\left(3\cdot 10^8\,\frac{м}{с}\right)^2}{6,64\cdot 10^{-27}\,кг}}=0,093\cdot 10^8\,\frac{м}{с}=9,3\frac{Мм}{с}.$$

Тогда

$$\left|v_{Li}\right|=\frac{4}{7}\cdot 9,3\frac{Мм}{с}=5,3\frac{Мм}{с}.$$

Ответ: $v_{He}=9,3\frac{Мм}{с}, \qquad v_{Li}=5,3\frac{Мм}{с}.$

670

Вычислить по теории Дебая теплоемкость цинка массой m=100 г при температуре T=10 К. Принять для цинка характеристическую температуру Дебая θ_D=300 К и считать условие $T \ll \theta_D$ выполненным.

Дано: $m = 100г = 0{,}1кг$; $T = 10K$; $\Theta_D = 300K$ **.**
Найти: $C = ?$ **.**

Решение

При $T \ll \Theta_D$ молярная теплоёмкость определяется формулой

$$C_\mu = 234R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3.$$

Здесь $R = 8{,}31\frac{Дж}{К \cdot моль}$ — универсальная газовая постоянная.

Количество вещества $\nu = \frac{m}{\mu}$. Здесь $\mu = 0{,}065\frac{кг}{моль}$ — молярная масса цинка.

Общая теплоёмкость $C = \nu C_\mu$. Следовательно,

$$C = \nu C_\mu = 234R\frac{m}{\mu}\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3.$$

Подставляем данные в последнюю формулу.

$$C = 234 \cdot 8{,}31\frac{Дж}{К \cdot моль} \cdot \frac{0{,}1кг}{0{,}065\frac{кг}{моль}}\left(\frac{10K}{300K}\right)^3 = 0{,}111\frac{Дж}{К}.$$

Проверим размерность.

$$[C] = \left[\frac{Дж}{К \cdot моль} \cdot \frac{кг}{\frac{кг}{моль}}\left(\frac{К}{К}\right)^3 = \frac{Дж}{К}\right].$$

Ответ: $C = 0{,}111\frac{Дж}{К}$.

680

Прямое напряжение U, приложенное к p-n-переходу, равно 2 В. Во сколько раз возрастет сила тока через переход, если изменить температуру от T_1=300 К до T_2=273 К?

Дано: $U = 2В;\ T_1 = 300К;\ T_2 = 273К$.

Найти: $\frac{I_2}{I_1} = ?$.

Решение

Сила тока в $p-n$ переходе определяется формулой

$$I = I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right)-1\right).$$

Здесь: $\exp(t) = e^t$ — экспоненциальная функция; $e = 1,6\cdot 10^{-19}\,Кл$ — заряд электрона; $k = 1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{Дж}{К}$ — постоянная Больцмана.

Следовательно,

$$I_1 = I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT_1}\right)-1\right),$$

$$I_2 = I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT_2}\right)-1\right).$$

Разделим два равенства

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT_2}\right)-1\right)}{I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT_1}\right)-1\right)} = \frac{\exp\left(\frac{eU}{kT_2}\right)-1}{\exp\left(\frac{eU}{kT_1}\right)-1}.$$

Подставим данные.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\exp\left(\frac{1,6\cdot 10^{-19}\,Кл\cdot 2В}{1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{Дж}{К}\cdot 273К}\right)-1}{\exp\left(\frac{1,6\cdot 10^{-19}\,Кл\cdot 2В}{1,38\cdot 10^{-23}\,\frac{Дж}{К}\cdot 300К}\right)-1} = 2089$$

Ответ: $\frac{I_2}{I_1} = 2089$.