

Задача 1. Решить смешанную задачу.

Вариант 8.

$$u_t = 6u_{xx}; \quad u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x; \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

Решение.

Это уравнение теплопроводности. Решаем задачу по методу Фурье. Решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Здесь $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t},$$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ - собственные числа задачи Штурма-Лиувилля; C_n - коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Подставим в начальное условие при $t = 0$. Получим:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x.$$

Как видим, разложение в ряд Фурье решения заданной смешанной задачи от разложения начального условия в ряд Фурье отличается множителями $e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$.

В нашем случае $a^2 = 6$. Следовательно, решение смешанной задачи имеет вид:

$$u(x,t) = 8e^{-54\pi^2 t} \sin 3\pi x + 9e^{-96\pi^2 t} \sin 4\pi x.$$