

Движение электрона в магнитном поле

Задача.

Электрон, прошедший ускоряющее электростатическое поле с разностью потенциалов U влетает в однородное магнитное поле с напряжённостью H под углом α к линиям магнитной индукции. Написать уравнение движения электрона, выбрав за ось аппликат ось, сонаправленную с вектором магнитной индукции.

Решение.

Под воздействие электростатического поля электрон приобретает кинетическую энергию $E = \frac{mv^2}{2}$, которая, в соответствии с законом сохранения энергии, равна работе этого поля $A = qU$.

$$E = \frac{mv^2}{2} = A = qU.$$

Здесь: $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — модуль заряда электрона, равный элементарному заряду; v — скорость электрона.

Из последнего равенства найдём [скорость электрона](#)

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \quad (1)$$

На заряженную частицу в магнитном поле действует [сила Лоренца](#)

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Эта сила равна по модулю

$$F = qvB \sin \alpha$$

В соответствии с правилами векторного произведения или правилом левой руки, сила Лоренца направлена перпендикулярно к векторам скорости и магнитной индукции.

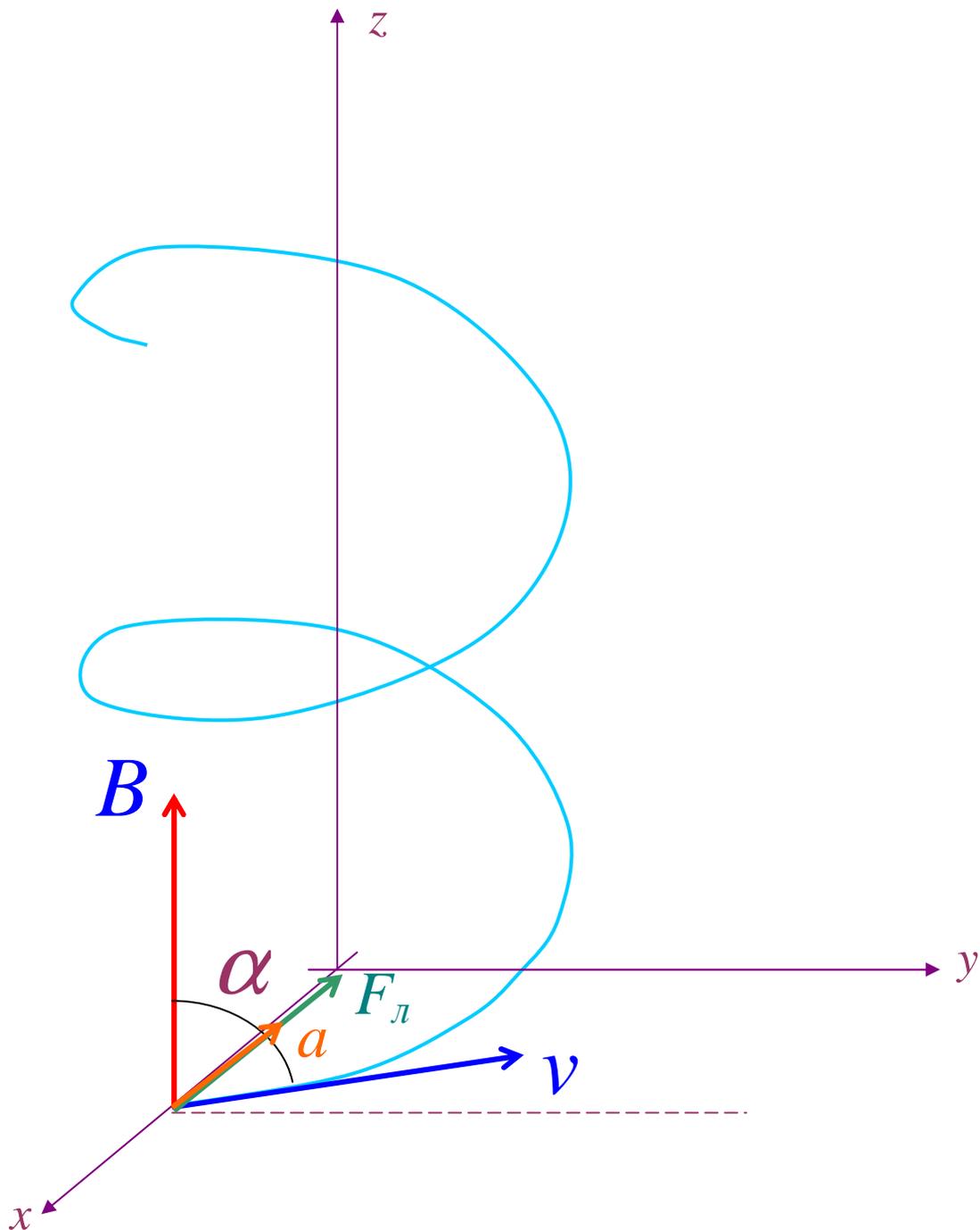


Рисунок 1. Движение электрона по винтовой линии в магнитном поле.

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Здесь \vec{a} — ускорение электрона.

Тогда [уравнение движения электрона](#) запишется в виде

$$m \cdot \vec{a} = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

или в скалярном виде

$$ma = qvB \sin \alpha. \quad (2)$$

Так как ускорение направлено перпендикулярно скорости электрона, то его траектория будет искривляться в направлении ускорения. В соответствии с этим траектория электрона будет представлять собой винтовую линию. Выберем ось Oz совпадающей с осью винтовой линии, а положительное направление оси Oz примем совпадающим с направлением смещения электрона вдоль винтовой линии. Оси Ox , Oy выберем так, указано на рисунке 1.

Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости, то проекция скорости на ось Oz неизменна и равна:

$$v_z = v \cos \alpha.$$

Проекция скорости на оси Ox , Oy , поэтому выберем проекцию, перпендикулярную оси Oz , которая неизменна по модулю, хотя и меняет своё направление. Это проекция лежит в плоскости Oxy и равна

$$v_{xy} = v \sin \alpha.$$

В силу вышесказанного уравнение ускорение a является центростремительным ускорением и равно

$$a = \frac{v_{xy}^2}{r} = \frac{(v \sin \alpha)^2}{r} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{r}.$$

В силу этого уравнение (2) запишется в виде

$$ma = m \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{r} = F = qvB \sin \alpha,$$

или в виде

$$v \sin \alpha = \frac{rqB}{m}.$$

Из последнего равенства находим радиус винтовой линии

$$r = \frac{m \cdot v \sin \alpha}{qB}.$$

Тогда угловая скорость вращения электрона вокруг оси винтовой линии

$$\omega = \frac{v_{xy}}{r} = \frac{v \sin \alpha}{\frac{m \cdot v \sin \alpha}{qB}} = \frac{qB}{m}.$$

Подставим радиус и угловую скорость в параметрические уравнения движения точки вдоль окружности (0) и добавим к полученной системе уравнение $z = v_z \cdot t = vt \cos \alpha$. Получим уравнение движение электрона в магнитном поле

$$\begin{cases} x(t) = \frac{m \cdot v \sin \alpha}{qB} \cdot \cos\left(\frac{qB}{m} t\right), \\ y(t) = \frac{m \cdot v \sin \alpha}{qB} \cdot \sin\left(\frac{qB}{m} t\right), \\ z(t) = vt \cos \alpha. \end{cases}$$

Учитывая выражение для скорости (1), а также выражение для магнитной индукции $B = \mu_0 \cdot H$, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{2emU} \sin \alpha}{\mu_0 eH} \cdot \cos\left(\frac{\mu_0 eH}{m} t\right), \\ y(t) = \frac{\sqrt{2emU} \sin \alpha}{\mu_0 eH} \cdot \sin\left(\frac{\mu_0 eH}{m} t\right), \\ z(t) = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot t \cos \alpha. \end{cases}$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma\text{H}}{\text{M}}$ — магнитная постоянная.

Заметим, что в общем случае уравнение винтовой линии имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(kt), \\ y(t) = a \sin(kt), \\ z(t) = bt. \end{cases}$$

<http://kvadromir.com/fis.php>