Уравнение прямой на плоскости.

Каноническое уравнение прямой.

Пусть прямая l параллельна вектору $\vec{a}=\{p,q\}$ и проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$, тогда уравнение этой прямой может быть записано в виде

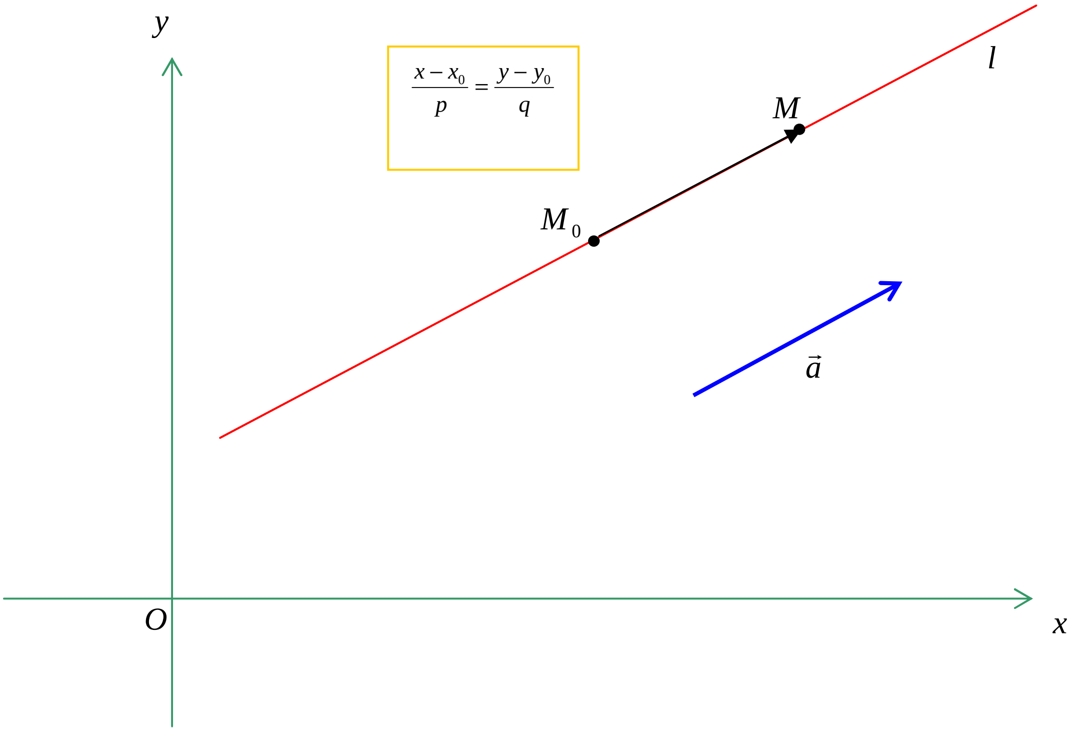
$$\boxed{\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}.} \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением* прямой, а вектор $\vec{a}=\{p,q\}$ — *направляющим вектором* прямой l.

Легко убедится, что это действительно так. Рассмотрим произвольную точку прямой $M(x,y)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$ лежит на прямой l. Но прямая l параллельна вектору $\vec{a}$. Следовательно, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ параллельны одной прямой, то есть они коллинеарные. Но тогда $\overrightarrow{M_0M}=k\vec{a}$, или $x-x_0=kp,\ \ y-y_0=kq$. А отсюда следует, что

$$\frac{x-x_0}{p}=k, \quad и \quad \frac{y-y_0}{q}=k.$$

Приравнивая два последних равенства, получим уравнение (1).

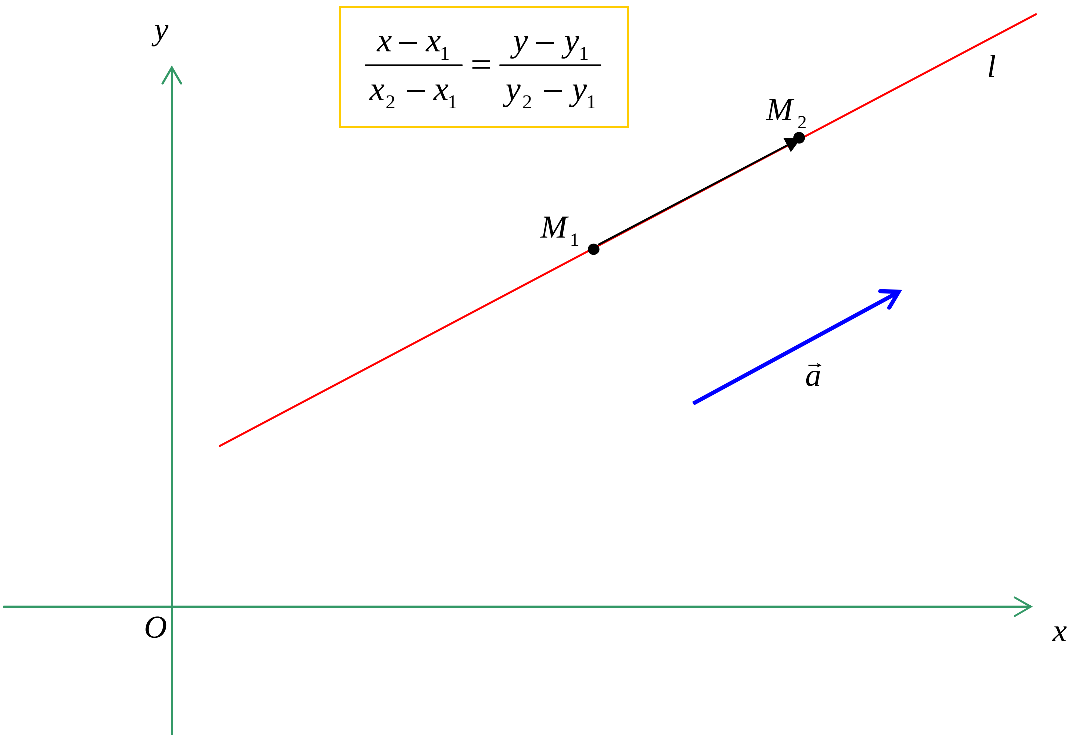


Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Если прямая l проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то её уравнение может быть записано в виде

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.} \tag{2}$$

В этом легко убедиться, если заметить, что вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ лежит на данной прямой, а, следовательно, коллинеарен ей. То есть вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ является направляющим вектором прямой l. Кроме того, прямая l проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. Применяя к этой прямой уравнение (1) и учитывая, что $p = x_2 - x_1$, $q = y_2 - y_1$, получим уравнение (2).



Параметрические уравнения прямой.

Так как в уравнении (1) обе дроби равны, то они равны одному и тому же числу t. Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = t$. Отсюда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{p} = t \\ \dfrac{y - y_0}{q} = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = pt \\ y - y_0 = qt \end{cases}$$

Отсюда получаем *параметрические уравнения прямой*.

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases} \qquad (3)$$

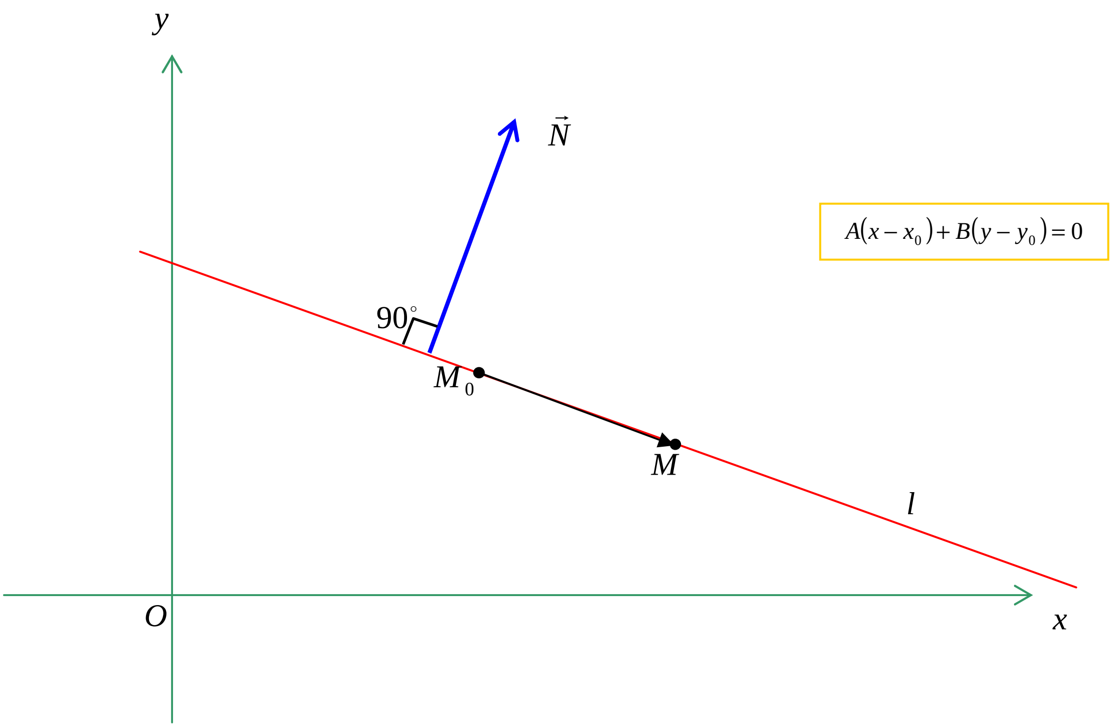
Здесь, как и в (1), $\vec{a} = \{p, q\}$ — направляющий вектор, а $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка, через которую проходит прямая.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = \{A, B\}$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,. \qquad (4)$$

Убедимся, что так и есть. Рассмотрим произвольную точку прямой $M(x, y)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ лежит на прямой l. Следовательно, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N} = \{A, B\}$. Но если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$. Раскрывая скалярное произведение, как сумму произведений соответствующих координат, получим выражение (4).

Вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ называется *нормальным вектором прямой*.



Общее уравнение прямой.

Общим уравнением прямой называется уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + C = 0\,.} \tag{5}$$

Общее уравнение легко получить из уравнения (4), если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Нормальное уравнение прямой.

Нормальным уравнением прямой называется уравнение вида

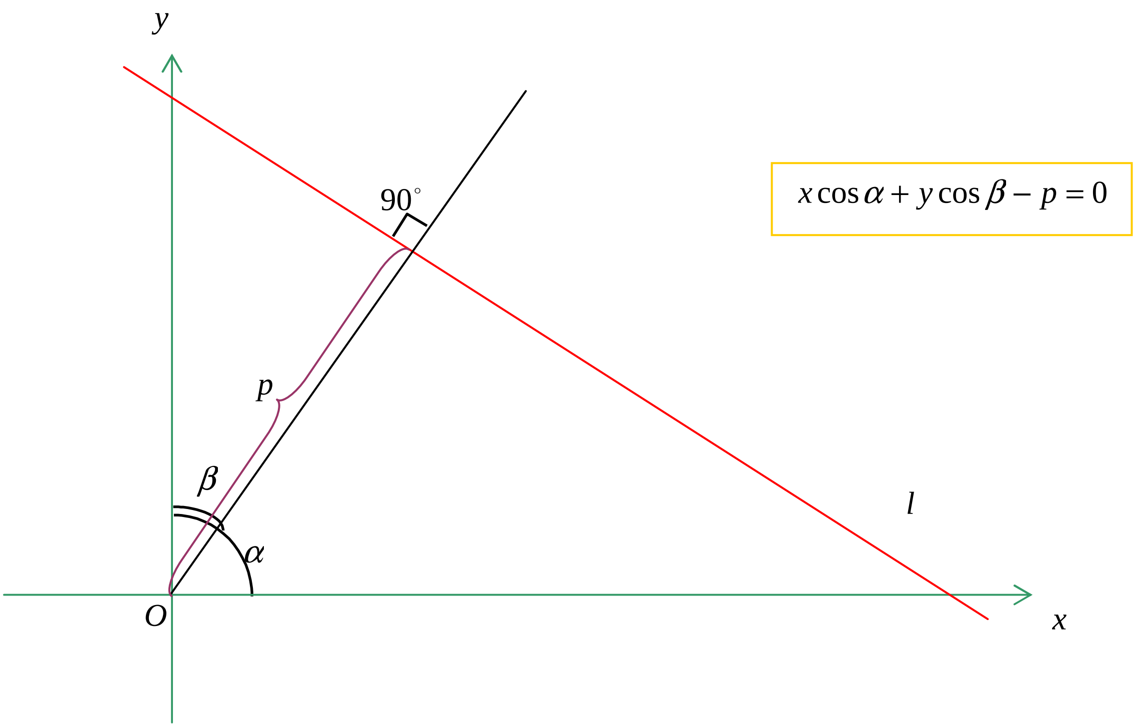
$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0\,.} \tag{6}$$

Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую – расстояние от начала координат до прямой. α, β — углы, образованные перпендикуляром с осями координат.

Нормальное уравнение прямой можно получить из общего уравнения. Для этого, общее уравнение (5) необходимо умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{sign(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Здесь $sign(C) = \pm 1$ — знак C. Принимаем $sign(C) = 1$, если $C \succ 0$. Если $C \prec 0$, то $sign(C) = -1$. Величины A, B, C это коэффициенты общего уравнения (5).

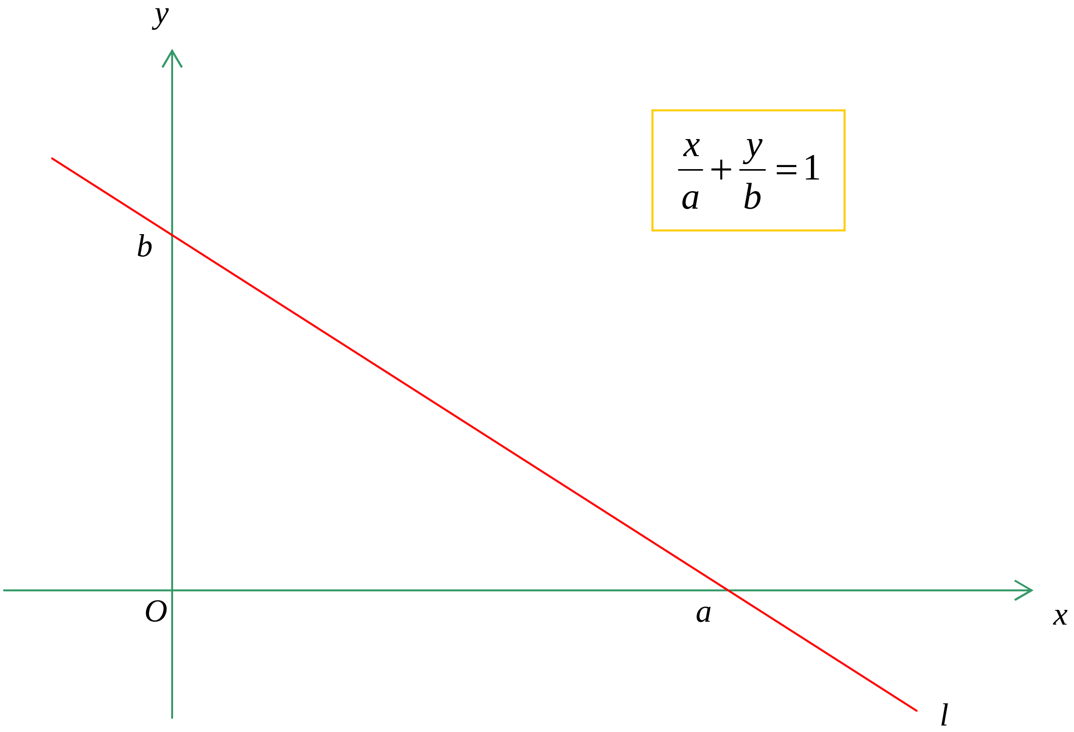


Уравнение прямой в отрезках.

Если прямая отсекает на осях координат x, y отрезки a и b соответственно, то её уравнение может быть записано в виде

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \qquad (7)$$

Это уравнение получается из общего уравнения, если в общем уравнении (5) перенести C вправо, а затем поделить обе части уравнения на $-C$. При этом $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.



Неполные уравнения прямой.

Если прямая проходит через начало координат, то $C=0$ и общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By=0.$$

Если прямая параллельна оси Ox, то $A=0$ и её общее уравнение имеет вид

$$By+C=0 \quad \text{или} \quad y=y_0.$$

Если прямая параллельна оси Oy, то $B=0$ и её общее уравнение имеет вид

$$Ax+C=0 \quad \text{или} \quad x=x_0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Уравнением прямой с угловым коэффициентом называется уравнение вида

$$\boxed{y = kx + b\,.} \qquad (8)$$

Здесь $k = tg\alpha$, а α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс Ox. Величина b равна координате пересечения прямой с осью ординат Oy.

Это уравнение легко получается из любого уравнения. Для этого необходимо из взятого уравнения выразить y через x.