Периодические функции

Периодические функции играют очень важную роль в математике и физике. В особенности это относится к тригонометрическим функциям sin(x) и cos(x).

Так, например, уравнение окружности радиуса *r* с центром в начале координат в параметрическом виде записываются с помощью тригонометрических функций синуса и косинуса угла α.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha), \\ y = r \cdot \sin(\alpha). \end{cases}$$

Если точка движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью ω, то её координаты являются тригонометрическими функция от времени, при этом уравнения движения точки могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(\omega t), \\ y(t) = r \cdot \sin(\omega t). \end{cases} \qquad (0)$$

Не удивительно тригонометрические функции встречаются не только в геометрии и математике в целом, но без них не возможно построение математических моделей в различных разделах физической науки от механики и электродинамики до ядерной физики и квантовой механики.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Электрон, прошедший ускоряющее электростатическое поле с разностью потенциалов U влетает в однородное магнитное поле с напряжённостью H под углом α к линиям магнитной индукции. Написать уравнение движения электрона, выбрав за ось аппликат ось, сонаправленную с вектором магнитной индукции.

Решение.

Под воздействие электростатического поля электрон приобретает кинетическую энергию $E=\frac{mv^2}{2}$, которая, в соответствии с законом сохранения энергии, равна работе этого поля $A=qU$.

$$E=\frac{mv^2}{2}=A=qU.$$

Здесь: $m=9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона; $q=e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл — модуль заряда электрона, равный элементарному заряду; v — скорость электрона.

Из последнего равенства найдём скорость электрона

$$v=\sqrt{\frac{2qU}{m}}. \qquad (1)$$

На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца

$$\vec{F}=q\left[\vec{v},\vec{B}\right].$$

Эта сила равна по модулю

$$F=qvB\sin\alpha$$

В соответствии с правилами векторного произведения или правилом левой руки, сила Лоренца направлена перпендикулярно к векторам скорости и магнитной индукции.

По второму закону Ньютона

$$\vec{F}=m\cdot\vec{a}.$$

Здесь $\vec{a}$ — ускорение электрона.

Тогда уравнение движения электрона запишется в виде

$$m\cdot\vec{a}=q\left[\vec{v},\vec{B}\right],$$

или в скалярном виде

$$ma=qvB\sin\alpha. \qquad (2)$$

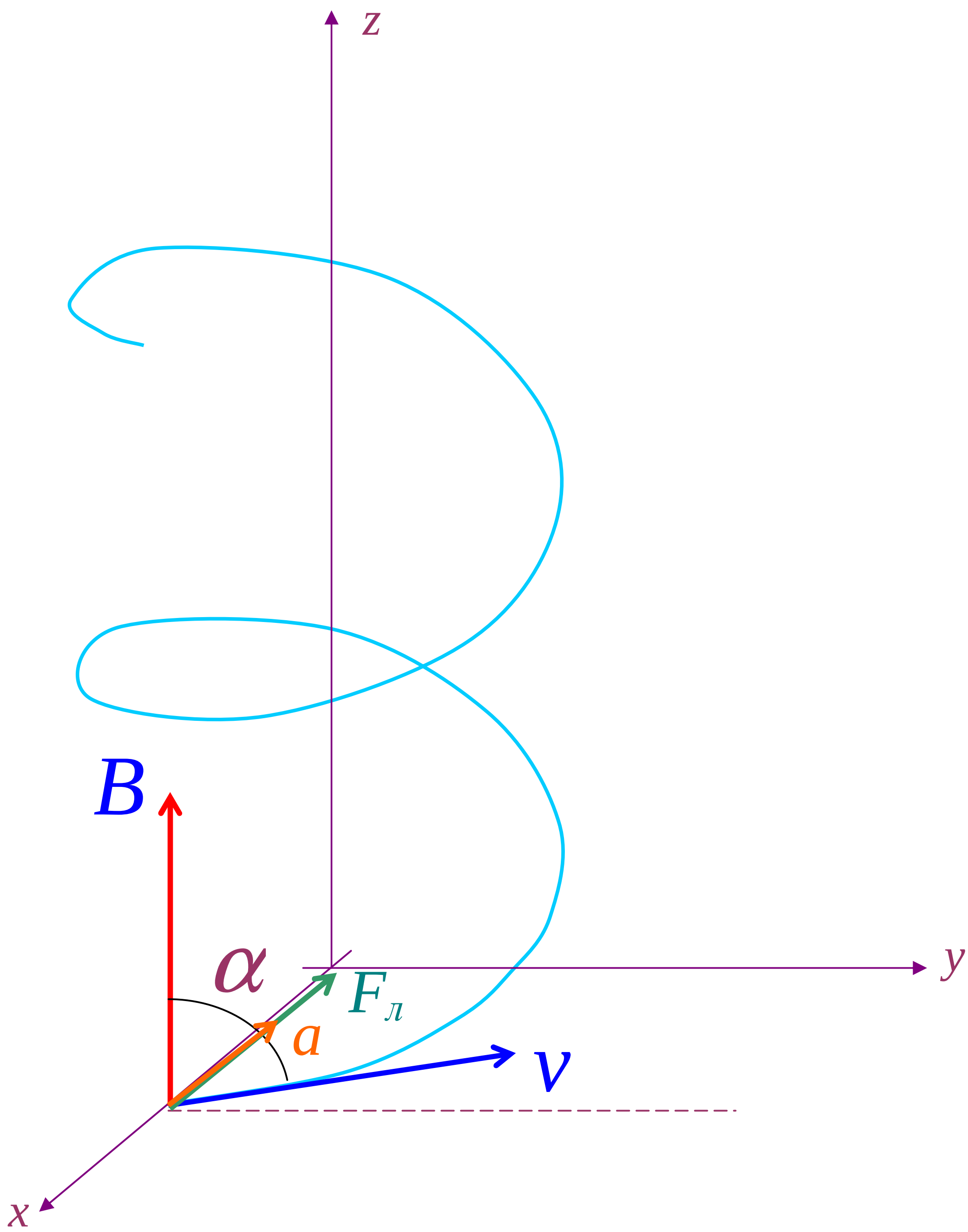

Рисунок 1. Движение электрона по винтовой линии в магнитном поле.

Так как ускорение направлено перпендикулярно скорости электрона, то его траектория будет искривляться в направлении ускорения. В соответствии с этим траектория электрона будет представлять собой винтовую линию. Выберем ось *Oz* совпадающей с осью винтовой линии, а положительное направление оси Oz примем совпадающим с направлением смещения электрона вдоль винтовой линии. Оси Ox, Oy выберем так, указано на рисунке 1.

Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости, то проекция скорости на ось Oz неизменна и равна:

$$v_z = v\cos\alpha.$$

Проекции скорости на оси Ox, Oy, поэтому выберем проекцию, перпендикулярную оси Oz, которая неизменна по модулю, хотя и меняет своё направление. Это проекция лежит в плоскости Oxy и равна

$$v_{xy} = v\sin\alpha.$$

В силу вышесказанного уравнение ускорение a является центростремительным ускорением и равно

$$a = \frac{v_{xy}^2}{r} = \frac{(v\sin\alpha)^2}{r} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{r}.$$

В силу этого уравнение (2) запишется в виде

$$ma = m\frac{v^2\sin^2\alpha}{r} = F = qvB\sin\alpha,$$

или в виде

$$v\sin\alpha = \frac{rqB}{m}.$$

Из последнего равенства находим радиус винтовой линии

$$r = \frac{m\cdot v\sin\alpha}{qB}.$$

Тогда угловая скорость вращения электрона вокруг оси винтовой линии

$$\omega = \frac{v_{xy}}{r} = \frac{v\sin\alpha}{\dfrac{m\cdot v\sin\alpha}{qB}} = \frac{qB}{m}.$$

Подставим радиус и угловую скорость в параметрические уравнения движения точки вдоль окружности (0) и добавим к полученной системе уравнение $z = v_z \cdot t = vt\cos\alpha$. Получим уравнения движение электрона в магнитном поле

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{m \cdot v\sin\alpha}{qB} \cdot \cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right), \\ y(t) = \dfrac{m \cdot v\sin\alpha}{qB} \cdot \sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right), \\ z(t) = vt\cos\alpha. \end{cases}$$

Учитывая выражение для скорости (1), а также выражение для магнитной индукции $B = \mu_0 \cdot H$, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{2emU}\sin\alpha}{\mu_0 eH} \cdot \cos\left(\dfrac{\mu_0 eH}{m}t\right), \\ y(t) = \dfrac{\sqrt{2emU}\sin\alpha}{\mu_0 eH} \cdot \sin\left(\dfrac{\mu_0 eH}{m}t\right), \\ z(t) = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} \cdot t\cos\alpha. \end{cases}$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\dfrac{Гн}{м}$ — магнитная постоянная.

Заметим, что в общем случае уравнение винтовой линии имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(kt), \\ y(t) = a\sin(kt), \\ z(t) = bt. \end{cases}$$

Очень часто периодические функции являются решениями различных дифференциальных и интегральных уравнений, то есть таких уравнений, которые наряду с неизвестной функцией и её аргументом содержат также производные и дифференциалы или интегралы. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Найти функцию, для которой сумма производной и первообразной равна нулю. Если известно, что при *x=0* и функция и первообразная принимают одно и тоже значение, равное 1.

Решение.

Обозначим искомую функцию через *f(x)*, а её первообразную через *F(x)*. Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} f'(x)+F(x)=0; \\ f(0)=1, \quad F(0)=1. \end{cases} \tag{3}$$

По определению, первообразной функции

$$F'(x)=f(x).$$

Тогда $f'(x)=\left(F'(x)\right)'=F''(x)$ и система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} F''(x)+F(x)=0; \\ F'(0)=1, \quad F(0)=1. \end{cases} \tag{4}$$

Поставленная задача (4) носит название задачи Коши для заданного уравнения. Задача названа в честь великого французского математика Огюстена Луи Коши, разработавшего основы математического анализа.

Заметим, что функция $F(x)=C\cdot\sin(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом постоянном значении *C*.

$$F''(x)+F(x)=0. \tag{5}$$

Чтобы убедится в этом достаточно дважды взять производную от данной функции и подставить её в последнее уравнение. Действительно,

$$F'(x)=C\cdot\cos(x),$$

$$F''(x)=\left(C\cdot\cos(x)\right)'=-C\cdot\sin(x),$$

$$F''(x)+F(x)=-C\cdot\sin(x)+C\cdot\sin(x)=0.$$

Аналогично, не сложно проверить, что функция $F(x) = C \cdot \cos(x)$ также является решением уравнения (5). Также решением данного уравнения является сумма этих функций

$$F(x) = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x).$$

Найдём производную полученной функции.

$$F'(x) = (C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x))' = -C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x).$$

По условию задачи

$$f(x) = F'(x) = -C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x),$$

и

$$f(0) = -C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0) = C_2 = 1.$$

Также

$$F(0) = C_1 \cdot \cos(0) + C_2 \cdot \sin(0) = C_1 = 1.$$

Таким образом, $C_1 = C_2 = 1$ и

$$F(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

Тогда искомая функция равна

$$f(x) = F'(x) = (\cos(x) + \sin(x))' = \cos(x) - \sin(x).$$

К числу периодических функций относятся не только тригонометрические функции, но также и некоторые другие. Так, например, функция, являющаяся дробной частью числа, также являются периодической, и имеет период равный 1. Эта функция равна разности между числом и его целой частью. Она обозначается $\{x\}$ и играет немаловажную роль в программировании и других прикладных науках. График этой функции изображён на рисунке 2.

Нетрудно получить из этой функции и другие периодические функции, имеющие различные области значений и различные периоды. Так, например, функция

$$f(x) = A \cdot \left\{ \frac{x}{B} \right\} - C$$

имеет максимальное значение равное $f_{msx} = A - C$, минимальное значение $f_{\min} = -C$ и период равный $T = B$.

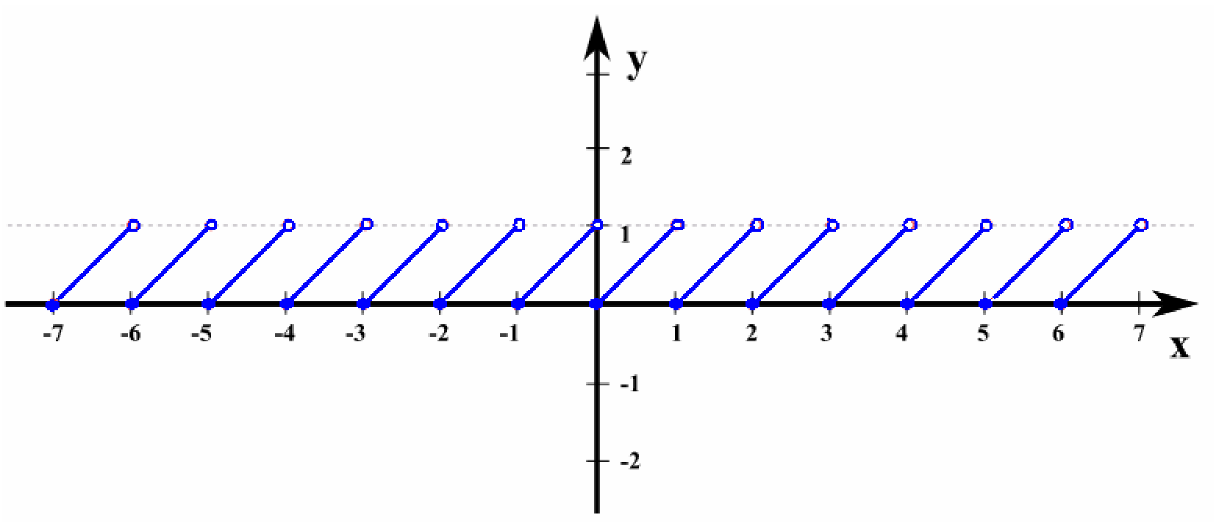

Рисунок 2. График периодической функции $y(x) = \{x\}$ — дробной части числа — с периодом 1.

Задача.

Записать выражение периодической функции, график которой представляет собой пилообразную линию, изображённую на рисунке 3.

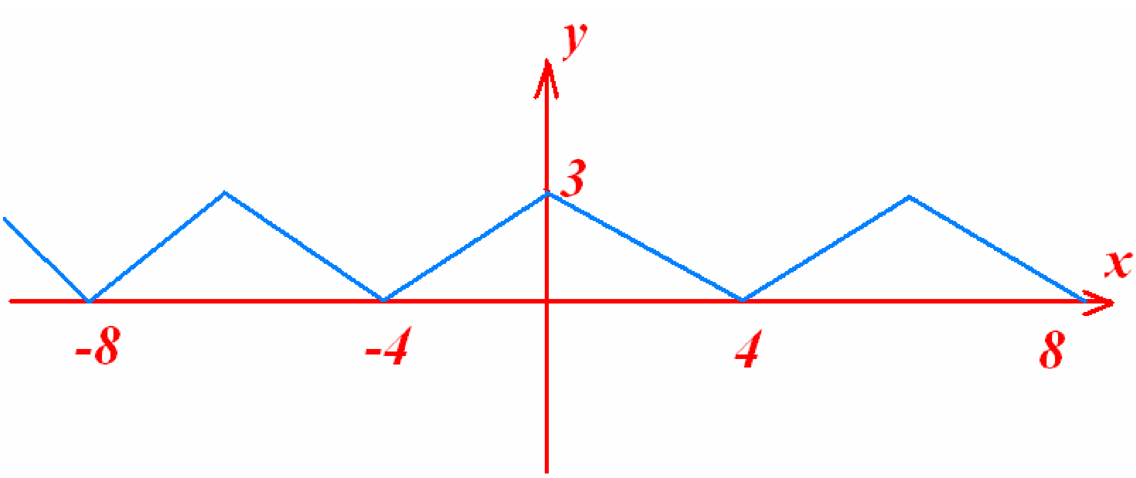

Рисунок 3. График периодической функции.

Решение.

Рассмотрим функцию $f_1(x)=6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}$. Эта функция имеет график, изображённый на рисунке 4

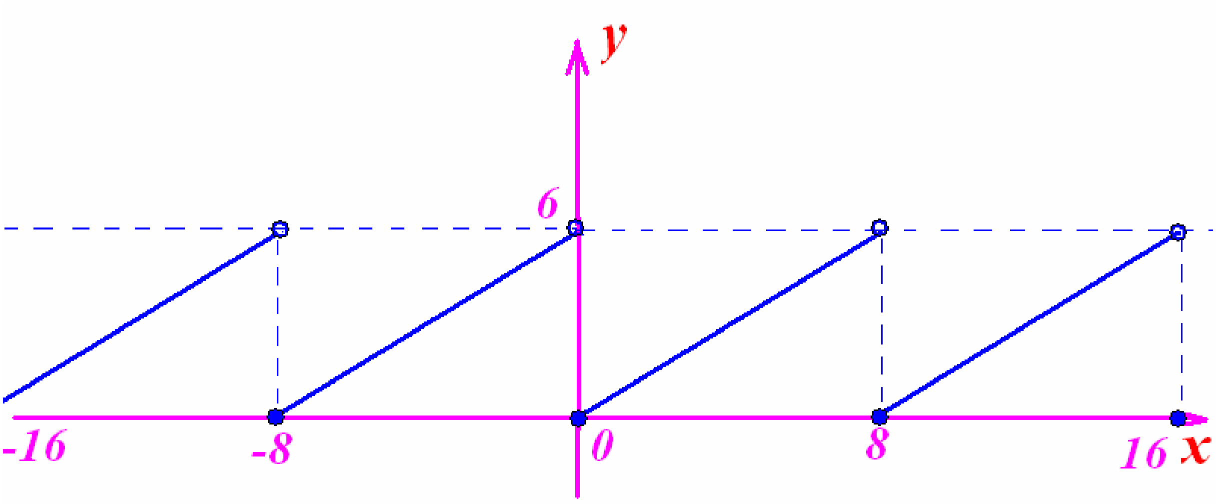

Рисунок 4. График периодической функции $f_1(x)=6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}$

График функции $f_2(x)=6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}-3$ будет проходить на три единицы ниже. А график функции $f(x)=|f_2(x)|=\left|6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}-3\right|$ получается из графика функции $f_2(x)=6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}-3$ симметричным отображением части, лежащей ниже оси *Ox* относительно этой оси, как это изображено на рисунке 3.

Таким образом, искомое выражение для функции имеет вид

$$f(x)=\left|6\cdot\left\{\frac{x}{8}\right\}-3\right|.$$

Заметим, что данная функция является непрерывной.