Разность квадратов тригонометрических функций

В этой статье рассмотрены формулы для разности квадратов тригонометрических функций, среди них: формула для разности квадратов синусов различных аргументов; формула для разности квадратов косинусов различных аргументов; формула для разности квадратов синуса и косинуса; формула для разности квадратов косинуса и синуса. Итак, запишем формулы разности квадратов тригонометрических функций, а ниже приведём их доказательство. Вот эти формулы.

Разность квадратов синусов различных аргументов равна произведению синуса разности и синуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x - y) \cdot \sin(x + y).$$

Разность квадратов косинусов различных аргументов равна произведению синуса разности аргумента отнимаемого и аргумента вычитаемого и синуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(y - x) \cdot \sin(x + y).$$

Разность квадратов косинуса и синуса различных аргументов равна произведению косинуса разности и косинуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x - y) \cdot \cos(x + y).$$

$$\sin^2 x - \cos^2 y = -\cos(x - y) \cdot \cos(x + y).$$

Формулы для разности квадратов тангенсов и котангенсов не столь красивы, поэтому приведены внизу статьи вместе с их доказательством.

Прочитав эту статью до конца, вы узнаете, как доказываются формулы для разности квадратов тригонометрических функций. Все эти формулы публикуются впервые, во всяком случае, на момент их публикации, нам не удалось найти их в сети Интернет. Формулы для разности квадратов тригонометрических функций элементарно доказываются и их доказательство приведено ниже. Вначале доказана формула для разности квадратов синусов, затем формула для разности квадратов косинусов. Далее, как следствие, выводятся формулы для разности квадратов разноимённых тригонометрических функций, например, формула для разности квадрата синуса и квадрата косинуса различных аргументов, а также формула разности квадрата косинуса и квадрата синуса. В заключение, как следствие, выводится формула для разности квадратов тангенсов различных аргументов, а также формула для разности квадратов котангенсов различных аргументов. Итак, хватит слов, приведём наконец обещанные, в начале статьи, доказательства для разности квадратов тригонометрических функций.

Разность квадратов синусов различных аргументов равна произведению синуса разности и синуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\boldsymbol{sin^2x - sin^2y = sin(x-y)\,sin(x+y).}$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. В результате получим:

$$sin^2x - sin^2y = (\sin x - \sin y)\cdot(\sin x + \sin y).$$

Используем формулы для разности и суммы синусов, известные из тригонометрии,

$$\sin x - \sin y = 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\sin x + \sin y = 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Тогда выражение запишется

$$sin^2x - sin^2y = 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) =$$

$$= 2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

В заключении используем формулу синуса двойного угла и получим

$$sin^2x - sin^2y = sin(x-y)sin(x+y).$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично докажем формулы для других разностей квадратов тригонометрических функций.

Разность квадратов косинусов различных аргументов равна произведению синуса разности аргумента отнимаемого и аргумента вычитаемого и синуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\boldsymbol{cos^2 x - cos^2 y = sin(y - x)\, sin(x + y).}$$

Доказательство.

Воспользовавшись формулой разности квадратов, формулами разности и суммы косинусов, а также формулой синуса двойного угла, запишем

$$cos^2 x - cos^2 y = (cosx - cosy)(cosx + cosy) =$$

$$= \left(cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\right) =$$

$$= -2sin\left(\frac{x-y}{2}\right) sin\left(\frac{x+y}{2}\right) 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right) cos\left(\frac{x-y}{2}\right) =$$

$$= -sin(x-y)sin(x+y) = sin(y-x)sin(x+y).$$

Что и требовалось доказать.

Разность квадратов косинуса и синуса различных аргументов равна произведению косинуса разности и косинуса суммы соответствующих аргументов, то есть

$$\boldsymbol{cos^2 x - sin^2 y = cos(x - y)cos(x + y).}$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой приведения $sin\alpha = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Тогда

$$cos^2 x - sin^2 y = cos^2 x - cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Используя предыдущий результат для разности квадратов косинусов и формулу приведения $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\alpha$, получим

$$cos^2 x - sin^2 y = cos^2 x - cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - y - x\right) sin\left(x + \frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= \cos(x+y)\cos(x-y).$$

Что и требовалось доказать.

Разность квадратов синуса и косинуса различных аргументов равна произведению косинуса разности и косинуса суммы соответствующих аргументов, взятому со знаком минус, то есть

$$\boldsymbol{\sin^2 x - \cos^2 y = -\cos(x-y)\cos(x+y).}$$

Доказательство.

$$\sin^2 x - \cos^2 y = \sin^2 x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + y\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= -\cos(x+y)\cos(x-y).$$

Что и требовалось доказать.

Разность квадратов тангенсов

$$\boldsymbol{tg^2 x - tg^2 y = tg(x-y)\cdot tg(x+y)\cdot(1 - tg^2 x\cdot tg^2 y),}$$

или

$$\boldsymbol{\frac{tg^2 x - tg^2 y}{1 - tg^2 x tg^2 y} = tg(x-y)\cdot tg(x+y).}$$

Доказательство.

Используем формулы для тангенса разности и тангенса суммы. Запишем

$$tg(x-y)\cdot tg(x+y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\cdot tgy}\cdot\frac{tgx + tgy}{1 - tgx\cdot tgy} = \frac{tg^2 x - tg^2 y}{1 - tg^2 x tg^2 y}.$$

Отсюда

$$tg^2 x - tg^2 y = tg(x-y)\cdot tg(x+y)\cdot(1 - tg^2 x\cdot tg^2 y).$$

Что и требовалось доказать.

Разность квадратов котангенсов

$$\boldsymbol{ctg^2 x - ctg^2 y = \frac{1 - ctg^2 x\cdot ctg^2 y}{ctg(x-y)\cdot ctg(x+y)},}$$

или

$$\frac{\mathbf{1-ctg^2x\cdot ctg^2y}}{\mathbf{ctg^2x-ctg^2y}}=\mathbf{ctg(x-y)\cdot ctg(x+y)}.$$

Доказательство.

$$ctg(x-y)\cdot ctg(x+y)=\left(\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{ctg^2x}-\frac{1}{ctg^2y}}{1-\frac{1}{ctg^2x}\cdot\frac{1}{ctg^2y}}\right)^{-1}=\left(\frac{ctg^2y-ctg^2x}{ctg^2x\cdot ctg^2y-1}\right)^{-1}=\frac{1-ctg^2x\cdot ctg^2y}{ctg^2x-ctg^2y}.$$

Что и требовалось доказать.

Итак, если вы прочитали эту статью до конца, то теперь знаете как можно преобразовать разность квадратов синусов различных аргументов, разность квадратов косинусов различных аргументов, а также формулы для разности квадратов других тригонометрических функций.

Желаю всем мира и добра!

26.02.2023 kvadromir.com