Колебания маятников

Колебания есть движения, повторяющиеся со временем. Колеблющиеся системы называются *маятниками*.

Такими колеблющимися системами или маятниками, например, являются: математический маятник; физический маятник; пружинный маятник; крутильный маятник; колебательный контур; груз, скользящий в полусфере; буй, колеблющийся в тихой воде; стержень, лежащий на цилиндрической поверхности.

Математический маятник представляет собой груз, подвешенный на длинной нити. Его также называют нитяной маятник.

Физический маятник — это некое твёрдое тело, шарнирно закреплённое в одной точке и могущее совершать колебания.

Пружинный маятник представляет собой груз, прикреплённый к пружине.

Крутильный маятник — груз на длинной нити. В отличие от математического маятника, крутильный маятник не раскачивается, а закручивается и раскручивается.

Груз, скользящий по внутренней поверхности полусферы, тоже совершает колебания и при малом трении ведёт себя как маятник.

Стержень, раскачивающийся на цилиндрической поверхности, обладает признаками маятника.

Буй на спокойной ровной воде теоретически тоже может рассматриваться как маятник.

В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и конденсатора, происходят электромагнитные колебания.

Для возникновения колебаний необходимо, чтобы при отклонении системы от положения равновесия, равнодействующая возникающих сил возвращала систему в исходное положение равновесия, и чтобы трение отсутствовало или было достаточно мало. Возвращающую силу называют также восстанавливающей силой.

При отсутствии трения и сопротивления движению колебания маятника подчиняются однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Величина ω называется циклической частотой колебаний.

Функция

$$x(t) = Bcos\omega t + Csin\omega t$$

является решением дифференциального уравнения (1) при любых значения параметров B и C. Действительно, продифференцируем дважды функцию $x(t)$ по времени t.

$$\dot{x}(t) = -B\omega sin\omega t + C\omega cos\omega t,$$

$$\ddot{x}(t) = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t.$$

Подставим $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в уравнение (1). Получим

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t + \omega^2(Bcos\omega t + Csin\omega t) = 0.$$

Что и требовалось показать.

Параметры B и C подбираются исходя из начальных условий. Например, если в начальный момент колеблющаяся величина x равна нулю, а скорость её изменения не нулевая, то колебания будут происходить по закону синуса. Действительно, подставим в уравнение $t = 0,\ \ x = 0.$ Получим

$$x(0) = Bcos0 + Csin0 = 0.$$

Отсюда $B = 0$ и уравнение колебаний запишется

$$x(t) = Csin\omega t.$$

Если в начальный момент нулю равна скорость изменения колеблющейся величины, то есть её производная, а сама изменяющаяся величина не равна нулю, а равна, например, x_0, то колебания будут происходить по закону косинуса. Действительно, подставим выражение для $x(t)$ в эти начальные условия

$$x(0) = Bcos0 + Csin0 = B = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = -B\omega sin0 + C\omega cos0 = C\omega = 0.$$

Отсюда $B = x_0$ и $C = 0$. Тогда

$$x(t) = x_0\, cos\omega t.$$

Такие колебания, происходящие по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими колебаниями*. Дифференциальное уравнение (1) называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Так как максимальные значение синуса и косинуса равны единице, то максимальное отклонение, называемое амплитудой, равно

$$x_{max} = C \cdot 1 = C,$$

$$x_{max} = x_0.$$

Амплитуду обозначают буквой A. Таким образом, $A = x_{max}$.

Максимальная скорость при этом равна

$$v_{max} = A\omega.$$

Действительно, например, для случая колебаний по закону синуса

$$x(t) = Asin\omega t$$

скорость

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega cos\omega t.$$

Максимальная скорость будет когда косинус равен единице, то есть

$$v_{max} = A\omega.$$

Аналогично проверяется для колебаний, происходящих по закону косинуса.

В начальный момент $v(0) = v_0$. Следовательно, $A\omega cos0 = A\omega = v_0$.

Максимальное отклонение от положения равновесия

$$x_{max} = A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Ускорение

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = -A\omega^2 sin\omega t.$$

Максимальное ускорение

$$a_{max} = A\omega^2.$$

На рисунке 1 изображён график зависимости угла отклонения от положения равновесия при колебаниях, происходящих по закону косинуса.

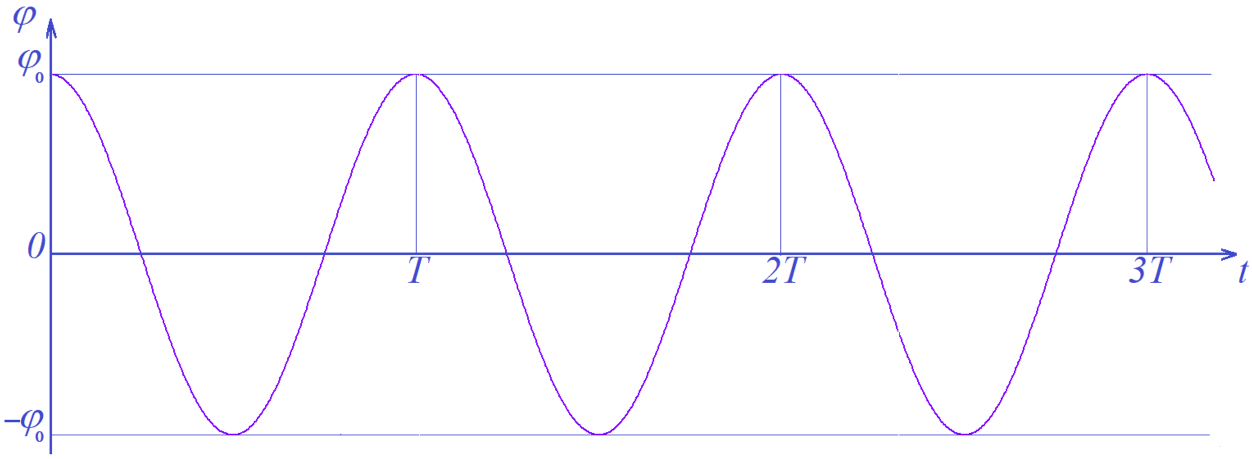

Рисунок 1.

На рисунке 2 изображён график зависимости отклонения от положения равновесия при колебаниях, происходящих по закону синуса.

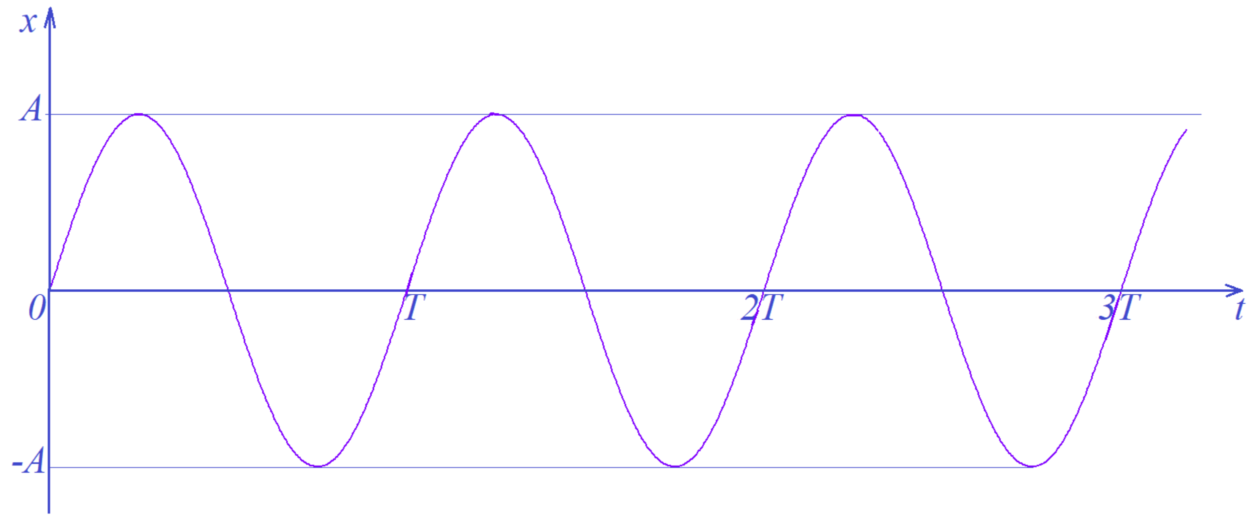

Рисунок 2.

Синус, как и косинус, является [периодической функцией] с периодом 2π, так как

$$sin(\alpha + 2\pi) = sin(\alpha).$$

Функция $f(t)$ называется **периодической** с периодом T, если для любого значения аргумента t справедливо равенство

$$f(t + T) = f(t).$$

Применим данное определение для полученного уравнения колебаний

$$x(t+T) = Csin\big(\omega(t+T)\big) = x(T) = Csin(\omega t).$$

Отсюда

$$Csin\big(\omega(t+T)\big) = Csin(\omega t),$$

или

$$sin(\omega t + \omega T) = sin(\omega t).$$

Так как период синуса равен 2π, то из последнего равенства получаем

$$\omega T = 2\pi,$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Период — это время, за которое совершается одно полное колебание, при котором груз возвращается в исходное положение.

Частота колебаний — это число колебаний, совершаемых маятником за одну секунду. Частота колебаний равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Из последнего равенства можем записать выражение для циклической частоты

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

У каждого маятника своя циклическая частота, зависящая от его геометрических и физических параметров.

Циклическая частота колебаний математического маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

где g — ускорение свободного падения, l — длина нити подвеса.

Циклическая частота колебаний физического маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}},$$

где m — масса маятника, J — момент инерции груза маятника относительно точки подвеса, a — расстояние от точки подвеса до центра масс.

Циклическая частота колебаний пружинного маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где m — масса груза маятника, k — жёсткость пружины маятника.

Циклическая частота колебаний крутильного маятника равна

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{Jl}},$$

где G — модуль сдвига материала упругой нити, J_p — полярный момент инерции поперечного сечения нити, J — момент инерции груза, l — длина нити.

Циклическая частота колебаний груза, скользящего по внутренней поверхности полусферы, равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

где R — радиус полусферы.

Циклическая частота колебаний стержня, качающегося на цилиндрической поверхности, равна

$$\omega = \frac{2}{l}\sqrt{3gR},$$

где l — длина стержня, R — радиус кривизны поверхности.

Циклическая частота колебаний буя на поверхности воды

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}},$$

где $\rho = 1 г/см^3$ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения цилиндрического буя, m — масса буя.

Циклическая частота электромагнитных колебаний в колебательном контуре равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L — индуктивность катушки, а C — электроёмкость конденсатора.

Соответственно, период колебаний маятника также зависит от геометрических и физических параметров маятника.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Физический маятник имеет период колебаний

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Период колебаний стержня на цилиндре

$$T = \frac{\pi l}{\sqrt{3gR}}.$$

Период колебаний буя (поплавка)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Период колебаний крутильного маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{Jl}{GJ_p}}.$$

Период электромагнитных колебаний в колебательном контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Ю. И. Дорогов

Калининград, 19 сентября 2022 года