Маятники

Колебания есть движения, повторяющиеся со временем. Колеблющиеся системы называются *маятниками*. Для возникновения колебаний необходимо, чтобы при отклонении системы от положения равновесия, равнодействующая возникающих сил возвращала систему в исходное положение равновесия, и чтобы трение отсутствовало или было достаточно мало.

Груз в полусфере

Рассмотрим простой пример колеблющейся системы в виде гладкой полусферы, в которую кладётся грузик (Рисунок 1). В начальный момент грузик лежит в самой нижней точке сферы. Из этого положения его легонько толкают, придавая начальную скорость v_0. Грузик снова соскальзывает, стремясь занять наиболее низкое первоначальное положение, но под действием сил инерции проскальзывает и поднимается вновь с другой стороны полусферы. Затем всё повторяется в обратном направлении. Так возникают колебания маятника.

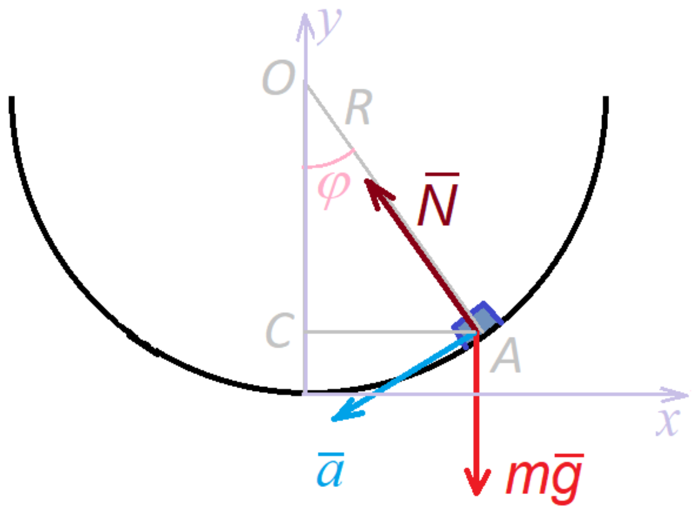

Рисунок 1.

На груз массы m действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно к поверхности сферы, то есть к центру полусферы радиуса R. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Проведём оси координат так, как показано на рисунке 1.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси координат, пренебрегая центростремительным ускорением. В проекции на ось абсцисс получим:

$$-Nsin\varphi = macos\varphi.$$

В проекции на ось ординат:

$$Ncos\varphi - mg = -masin\varphi.$$

Здесь φ — угол, образованный нормалью к поверхности в точке расположения груза с вертикалью.

Перепишем последние два уравнения в виде:

$$Nsin\varphi = -macos\varphi,$$

$$Ncos\varphi = mg - masin\varphi.$$

Разделим первое из этих уравнений на второе

$$tg\varphi = \frac{acos\varphi}{asin\varphi - g}.$$

При малых углах $\varphi \ll 1,\ tg\varphi \approx sin\varphi$ и $asin\varphi \ll g$. С учётом этого и пренебрегая $asin\varphi$ в сравнении с g, перепишем последнее уравнение в виде

$$sin\varphi = -\frac{acos\varphi}{g}.$$

С другой стороны, проекция ускорения на ось абсцисс равна производной от проекции скорости по времени или второй производной от координаты x по времени, то есть $acos\varphi = \ddot{x}$. Из треугольника OAC находим $sin\varphi = x/R$. С учётом этого последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{x}{R} = -\frac{\ddot{x}}{g},$$

или

$$\ddot{x} + \frac{g}{R}x = 0.$$

Обозначим $\omega = \sqrt{g/R}$. Тогда последнее дифференциальное уравнение перепишется в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (1)$$

Несложно убедиться, что функция

$$x(t) = Bcos\omega t + Csin\omega t$$

является решением уравнения (1) при любых значения величин B и C. Действительно, продифференцируем дважды функцию $x(t)$ по времени t.

$$\dot{x}(t) = -B\omega sin\omega t + C\omega cos\omega t,$$

$$\ddot{x}(t) = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t.$$

Подставим $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в уравнение (1). Получим

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t + \omega^2(Bcos\omega t + Csin\omega t) = 0.$$

Что и требовалось показать.

В начальный момент координата грузика равна нулю. То есть $x(0) = 0$, или $x(0) = Bcos0 + Csin0 = 0$. Отсюда $B = 0$ и уравнение колебаний запишется

$$x(t) = Csin\omega t.$$

Такие колебания, происходящие по закону синуса или косинуса, называются гармоническими колебаниями. Дифференциальное уравнение (1) называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Так как максимальное значение синуса равно единице, то максимальное отклонение, называемое амплитудой, равно

$$x_{max} = C \cdot 1 = C.$$

Синус является периодической функцией с периодом 2π, так как

$$sin(\alpha + 2\pi) = sin(\alpha).$$

Функция $f(t)$ называется периодичной с периодом T, если для любого значения аргумента t справедливо равенство

$$f(t + T) = f(t).$$

Применим данное определение для полученного уравнения колебаний

$$x(t + T) = Csin\big(\omega(t + T)\big) = x(T) = Csin(\omega t).$$

Отсюда

$$\mathrm{C}sin\big(\omega(t + T)\big) = \mathrm{C}sin(\omega t),$$

или

$$sin(\omega t + \omega T) = sin(\omega t).$$

Так как период синуса равен 2π, то из последнего равенства получаем

$$\omega T = 2\pi,$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величина ω, найденная ранее называется при этом циклической частотой. Таким образом,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Отсюда находим период колебаний

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Период — это время, за которое совершается одно полное колебание, при котором груз возвращается в исходное положение.

Математический маятник

Математический маятник представляет собой груз массы m, подвешенный на длинной нити длины l (Рисунок 2). Груз отклоняется от положения равновесия на небольшое расстояние и отпускается. Под влиянием силы тяжести и силы натяжения нити груз стремится вернуться в положение равновесия, но по инерции пролетает дальше и снова отклоняется уже в другую сторону. После максимального отклонения груз совершает обратное движение и всё повторяется. Так происходят колебания нитяного маятника, который ещё называют математическим маятником.

Рассмотрим эти колебания с точки зрения второго закона Ньютона. На груз действует две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила натяжения нити $\vec{F}$, направленная вдоль нити от груза.

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Здесь $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ — ускорение груза; $\vec{a}_\tau$ — касательное (тангенциальное) ускорение груза, направленное по касательной к траектории; $\vec{a}_n$ — нормальное (центростремительное) ускорение груза, направленное к центру траектории, то есть вдоль нити.

Проведём оси координат так, как показано на рисунке 2. Тогда второй закон Ньютона в проекции на ось абсцисс:

$$-mgsin\varphi = ma_{\tau}. \qquad (2)$$

Здесь φ — угол отклонения нити от вертикали. Положительным направлением угла отклонения считаем направление против часовой стрелки, то есть влево.

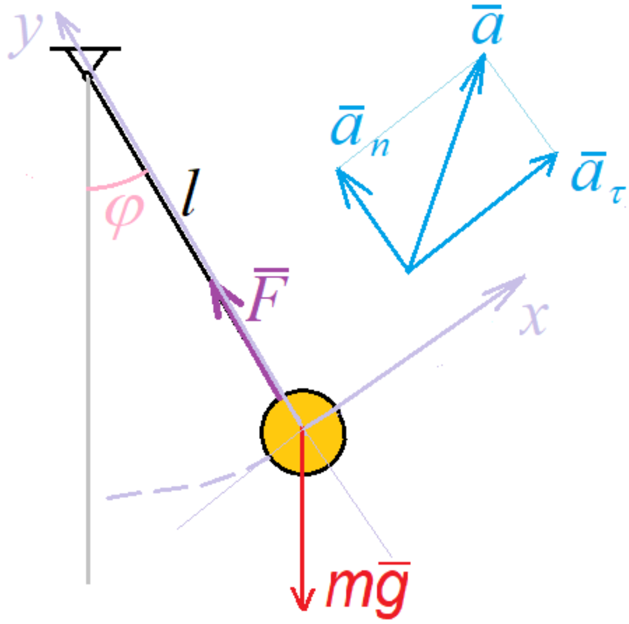

Рисунок 2.

В проекции на ось ординат второй закон Ньютона запишется:

$$F - mgcos\varphi = ma_n.$$

Касательное ускорение равно

$$a_{\tau} = \varepsilon l,$$

где $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение, здесь двумя точками обозначена вторая производная по времени. Подставим в (2) и получим

$$-mgsin\varphi = ml\ddot{\varphi}.$$

Полагая, что углы отклонения маятника достаточно малые, примем $sin\varphi \approx \varphi$, и, после сокращения на m, перепишем последнее уравнение в виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Обозначим $\omega = \sqrt{g/l}$. Тогда последнее дифференциальное уравнение перепишется в виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (3)$$

Как и в предыдущем случае, несложно убедиться, что функция

$$\varphi(t) = Bcos\omega t + Csin\omega t$$

является решением уравнения (2) при любых значения величин B и C. Действительно, продифференцируем дважды функцию $\varphi(t)$ по времени t.

$$\dot{\varphi}(t) = -B\omega sin\omega t + C\omega cos\omega t,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t.$$

Подставим $\varphi(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$ в уравнение (3). Получим

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = -B\omega^2 cos\omega t - C\omega^2 sin\omega t + \omega^2(Bcos\omega t + Csin\omega t) = 0.$$

Что и требовалось показать.

Такое решение $\varphi(t)$ называется *общим решением дифференциального уравнения* (3).

Для определения произвольных постоянных B и C воспользуемся условиями в начале колебаний — начальными условиями. В начальный момент времени, когда $t = 0$ и когда колебания только начались, отклонение было наибольшим, обозначим его $\varphi_0 = \varphi_{max}$, при этом угловая скорость была равна нулю. Таким образом начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Подставим функцию $\varphi(t)$ и её производную $\dot{\varphi}(t)$ в эти условия.

$$\varphi(0) = Bcos0 + Csin0 = B = \varphi_0,$$

$$\dot{\varphi}(0) = -B\omega sin0 + C\omega cos0 = C\omega = 0.$$

Отсюда $B = \varphi_0,\ C = 0$. Тогда решение

$$\varphi(t) = \varphi_0 cos\omega t.$$

Мы видим, что колебания происходят по закону косинуса. Последнее уравнение называется уравнением колебаний математического маятника. Колебания, происходящие по закону синуса или косинуса, называются гармоническими колебаниями. На рисунке 3 изображён график зависимости угла отклонения от времени.

Если провести оси координат из положения равновесия, то уравнение колебаний можно переписать в виде:

$$x(t) = x_0 cos\omega t.$$

Если в начальном положении груз не был отклонён, а ему толчком была придана начальная скорость v_0, уравнение колебаний запишется в виде:

$$x(t) = Asin\omega t.$$

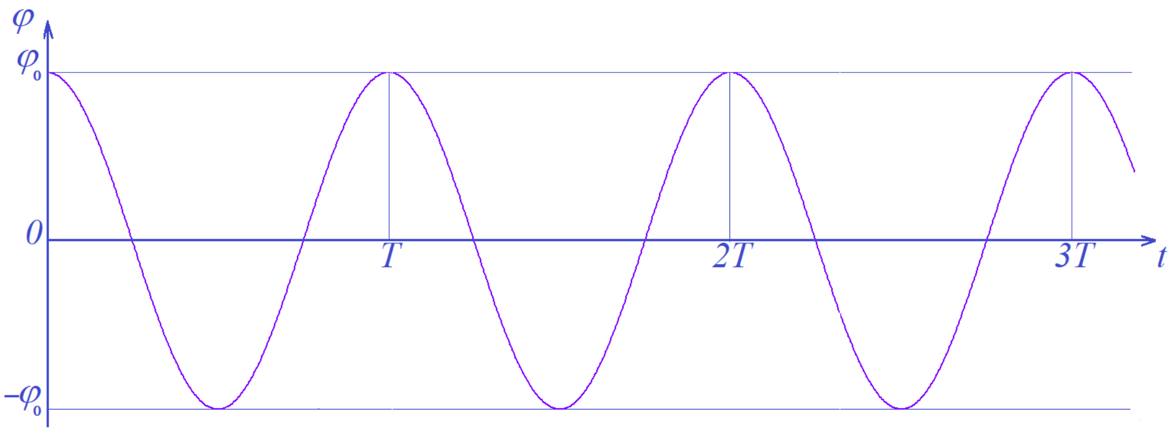

Рисунок 3.

Скорость

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega cos\omega t.$$

Максимальная скорость

$$v_{max} = A\omega.$$

В начальный момент $v(0) = v_0$. Следовательно, $A\omega cos0 = A\omega = v_0$.

Максимальное отклонение от положения равновесия называется амплитудой колебаний

$$x_{max} = A = \frac{v_0}{\omega}.$$

Ускорение

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = -A\omega^2 sin\omega t.$$

Максимальное ускорение

$$a_{max} = A\omega^2.$$

На рисунке 4 изображён график зависимости отклонения от времени при колебаниях, совершаемых по закону синуса.

Величина $\omega = \sqrt{g/l}$, как и ранее, называется циклической частотой колебаний. Как и в предыдущем случае $\omega T = 2\pi$. Отсюда, для периода получаем $T = 2\pi/\omega$.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

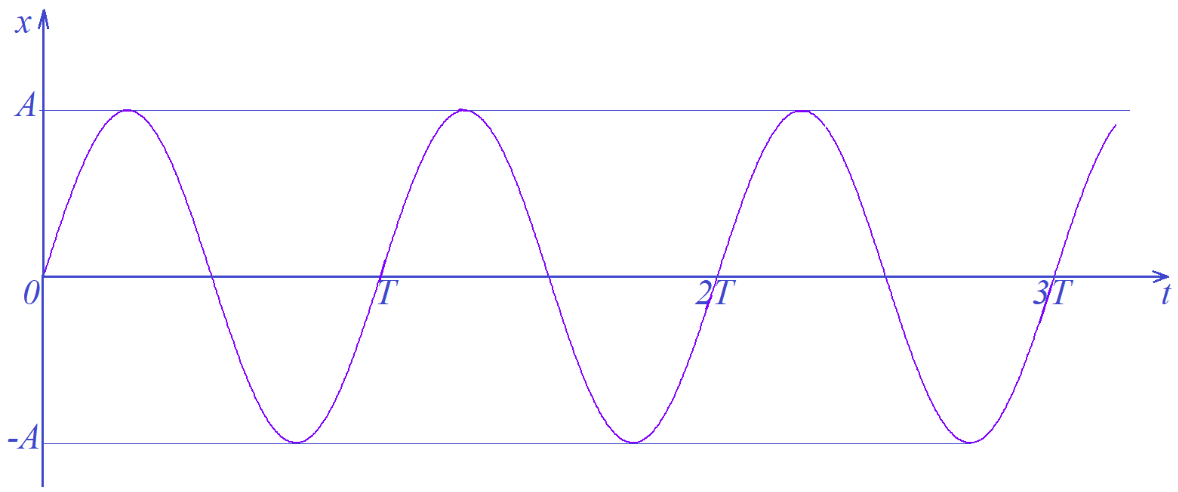

Рисунок 4.

Частота колебаний — число колебаний маятника за одну секунду — равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Отсюда

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Равнодействующая сил, приложенных к грузу маятника, называется восстанавливающей или возвращающей силой. По второму закону Ньютона восстанавливающая сила равна

$$F = ma = -Am\omega^2 sin\omega t.$$

Максимальное значение возвращающей силы равно

$$F_{max} = Am\omega^2 = \frac{Amg}{l}.$$

Кинетическая энергия груза маятника равна

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} cos^2\omega t.$$

Полная энергия колебаний маятника, по закону сохранения, равна максимальной кинетической энергии груза маятника

$$E = E_{кmax} = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Потенциальная энергия маятника равна

$$E_п = E - E_к = \frac{mA^2\omega^2}{2} sin^2\omega t.$$

Физический маятник

В физическом маятнике, некоторое твёрдое тело массы m, подвешено и закреплено шарнирно в одной точке (Рисунок 5). Момент инерции тела J относительно оси вращения, а его центр тяжести расположен на расстоянии a от оси, проходящей через точку закрепления. Такой маятник, будучи отклонённым от положения равновесия, колеблется по тому же принципу, что и математический. Найдём период колебаний физического маятника.

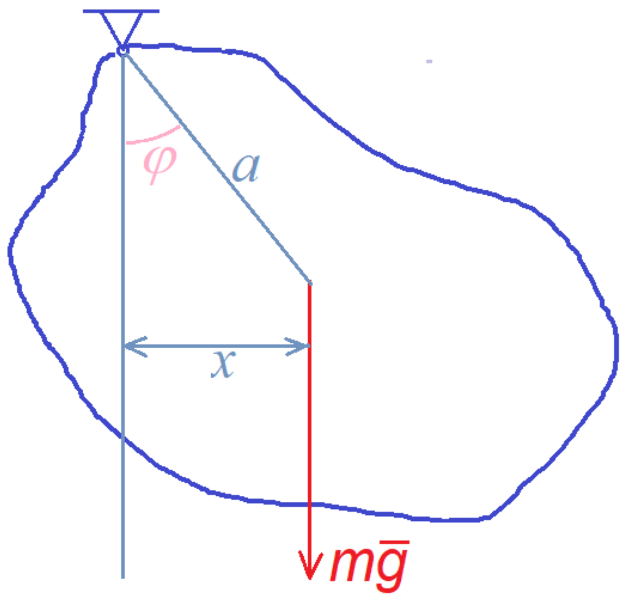

Рисунок 5.

Сила тяжести, приложенная к центру масс маятника, создаёт относительно оси, проходящей через точку подвеса, момент

$$M = -mgx = -mgasin\varphi.$$

Здесь φ — угол отклонения от положения равновесия.

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение.

Подставляя выражения для углового ускорения и момента в последнее уравнение и учитывая, что при малых углах $sin\varphi \approx \varphi$, после элементарного преобразования получим

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0.$$

Здесь ω — циклическая частота.

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}.$$

Как и выше для математического маятника $\omega = 2\pi/T$. Поэтому период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

Рассмотрим, например, стержень длины l и массы m, подвешенный за один конец. Момент инерции стрежня относительно его середины

$$J_0 = \frac{ml^2}{12}.$$

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно оси вращения

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Расстояние от центра масс стержня до точки подвеса, то есть до конца стержня, равно $a = l/2$.

Следовательно, период равен

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{mg\frac{l}{2}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Пружинный маятник

В пружинном маятнике груз массы m крепится к пружине жёсткости k, другой конец которой закреплён неподвижно (Рисунок 6). Отклонение груза приведёт к деформации пружины. Возникающая при этом сила упругости стремится вернуть груз в исходное положение, но по инерции груз пролетает положение равновесия и отклоняется в другую сторону. Пружинный маятник начинает колебаться.

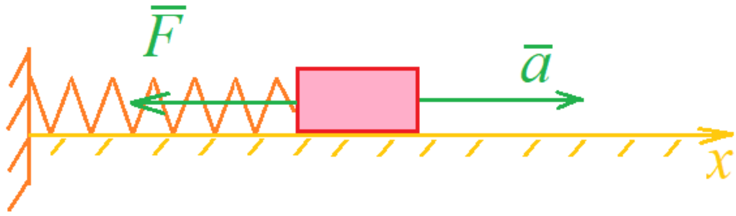

Рисунок 6.

На груз маятника действует сила упругости, которая по закону Роберта Гука равна

$$F = -kx.$$

По второму закону Исаака Ньютона

$$F = ma,$$

где $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ — ускорение груза.

Приравнивая выражения для силы, полученные по закону Гука и закону Ньютона, получим

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Перенося в одну сторону и разделив на массу, перепишем уравнение в виде

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

или в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — циклическая частота колебаний пружинного маятника.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Возвращающая сила

$$F = -kx = -kAsin\omega t.$$

Потенциальная энергия пружины

$$E_{п} = \frac{kA^2}{2} sin^2\omega t.$$

Полная энергия маятника равна сумме потенциальной энергии пружины и кинетической энергии груза. В момент, когда отклонение максимально, а скорость равна нулю, кинетическая энергия груза тоже равна нулю. Поэтому полная энергия пружинного маятника равна максимальной потенциальной энергии пружины

$$E = E_{пmax} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия груза маятника равна

$$E_{к} = E - E_{п} = \frac{kA^2}{2} cos^2\omega t.$$

Качения стержня на цилиндре

Рассмотрим стержень длины l и массы m, лежащий на цилиндре поперёк его длины, и касающийся его в середине (Рисунок 7). Если легонько приподнять один конец стержня и отпустить, то стержень начнёт качаться. При отсутствии проскальзывания, малые колебания стержня могут продолжаться некоторое время, после чего затухают под воздействием сопротивления воздуха.

При перекатывании стержня по поверхности цилиндра точка касания смещается из середины O в некоторую точку A. При этом середина стержня приподнимается и стержень наклоняется. Обозначим угол наклона стержня к горизонту через φ. Обозначим через C точку пересечения оси цилиндра с плоскостью рисунка. Радиус цилиндра $R = CA$. Момент инерции стержня относительно точки опоры A (центра вращения) равен по теореме Штейнера

$$J = \frac{ml^2}{12} + ms^2,$$

где $s = OA = Rtg\varphi$.

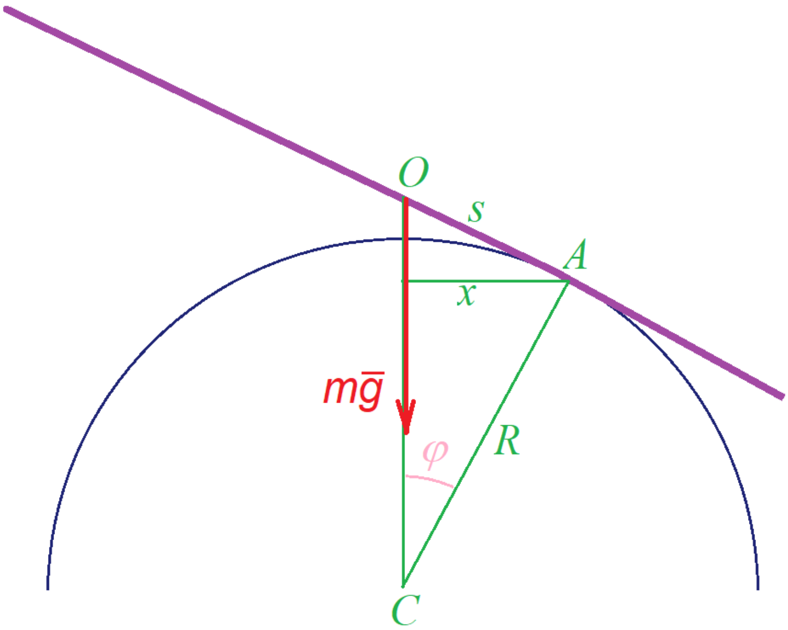

Рисунок 7.

Уравнение моментов

$$mgx + J\varepsilon = 0.$$

Здесь $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение стержня при его вращении относительно центра вращения A; $x = R sin\varphi$ — плечо силы тяжести. Подставляя момент инерции, плечо силы тяжести и угловое ускорение в уравнение моментов, получим

$$mgR sin\varphi + \left(\frac{ml^2}{12} + mR^2 tg^2\varphi\right)\ddot{\varphi} = 0.$$

При малых углах $\varphi \ll 1$ справедливо приближённое равенство $sin\varphi \approx \varphi$ и неравенство $mR^2tg^2\varphi \ll ml^2/12$. Поэтому уравнение моментов можно переписать в виде

$$mgR\varphi + \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} = 0.$$

После деления на $ml^2/12$ и элементарных преобразований, последнее уравнение запишем в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0.$$

Циклическая частота при этом равна

$$\omega = \frac{2}{l}\sqrt{3gR}.$$

Период колебаний стержня

$$T = \frac{\pi l}{\sqrt{3gR}}.$$

Из последней формулы видно, чем длиннее стержень, тем медленнее он качается. С другой стороны, чем больше радиус кривизны цилиндрической поверхности, тем меньше период колебаний, то есть колебания происходят быстрее.

Исходя из вида дифференциального уравнения делаем вывод, что стержень совершает гармонические колебания при своём качении по поверхности цилиндра.

Колебания цилиндрического буя или поплавка на водной глади без волн

Продолжая исследовать различные маятники обратим свой взор на цилиндрический буй или поплавок, плавающий в ёмкости с водой. Поверхность воды гладкая. Ось плавающего цилиндра вертикальная.

Если цилиндр немного утопить, то он начнёт всплывать, по инерции проскочит положение равновесия и снова начнёт тонуть. Возникают колебания. Очевидно, такие колебания будут быстро затухать за счёт трения и сопротивления воды с одной стороны, а с другой стороны колебания буя вызывают колебания воды и волны, что также сопряжено со значительной потерей энергии. Тем не менее, пренебрегая всеми этими диссипативными процессами и явлениями, найдём период колебаний буя (Рисунок 8).

Примем следующие обозначения: ρ — плотность воды; m — масса буя; S — площадь его поперечного сечения; h — глубина подводной части буя в процессе колебаний; h_0 — глубина подводной части буя в состоянии равновесия.

На буй действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вертикально вверх. Сила Архимеда равна

$$F_A = \rho g V,$$

где $V = Sh$ — объём погружённой части цилиндра.

По второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось

$$F_A - mg = ma,$$

где $a = d^2y/dt^2 = \ddot{y}$ — ускорение буя, $y = h_0 - h$ — перемещение буя относительно исходного равновесного положения.

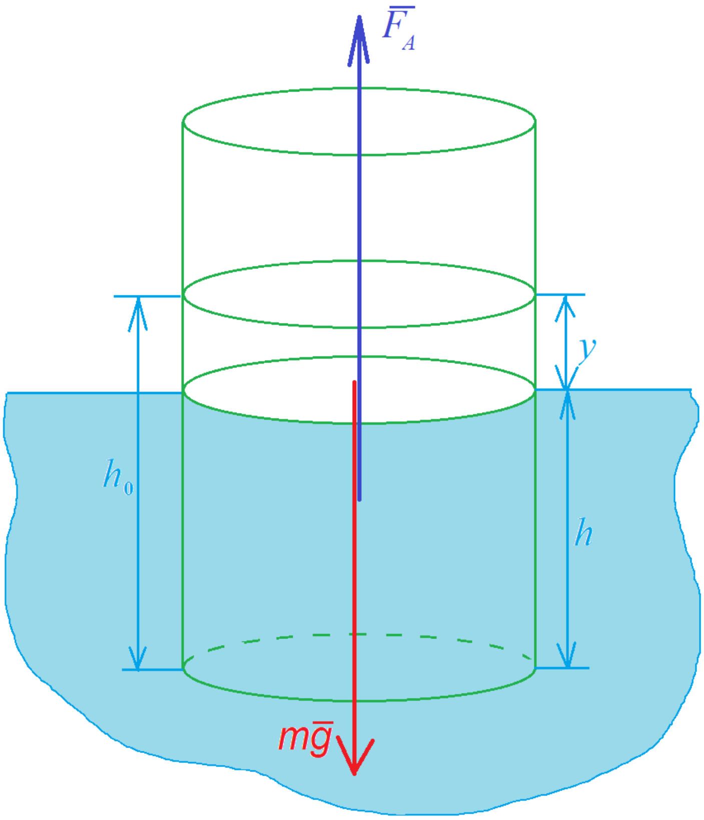

Рисунок 8.

Подставляя выражения ускорение и силы Архимеда во второй закон Ньютона, получим

$$\rho g S h - mg = m\ddot{y},$$

или

$$\rho g S h_0 - \rho g S y - mg = m\ddot{y}.$$

В равновесном состоянии $F_A = mg$, или $\rho g S h_0 = mg$. Учитывая этот факт, второй закон Ньютона перепишем в виде

$$m\ddot{y} + \rho g S y = 0.$$

Разделим на массу и преобразуем к виду

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\rho g S/m}$ — циклическая частота колебаний.

Период колебаний буя (поплавка)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}\ .$$

Крутильный маятник и колебательный контур

Крутильный маятник представляет собой некий груз, подвешенный на длинной упругой нити (Рисунок 9.). Это может быть не груз, а, например, пара грузов, соединённых стержнем. При повороте грузов нить закручивается, возникает крутящий момент, который стремится вернуть грузы в исходное положение. За счёт инерции грузы проходят исходное положение и закручивают нить в противоположном направлении. Затем снова нить раскручивается и всё повторяется. Так возникают колебания крутильного или торсионного маятника. Найдём период его колебаний.

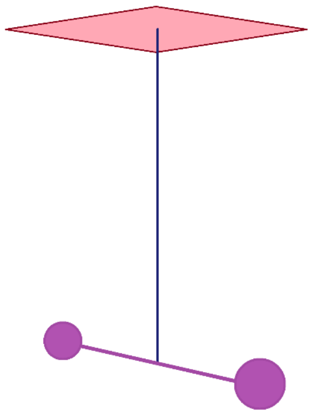

Рисунок 9.

Из курса сопротивления материалов можем заключить, что крутящий момент на конце упругой нити равен

$$M_{\text{кр}} = GJ_p\frac{\varphi}{l},$$

где G — модуль сдвига; J_p — полярный момент инерции поперечного сечения нити; l — длина нити; φ — угол закручивания нити.

С другой стороны, из основного закона вращательного движения, для груза заключаем

$$J\varepsilon = -M_{\text{кр}} \,,$$

где J — момент инерции груза; $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение груза.

С учётом сказанного уравнение движения груза запишется в виде

$$J\ddot{\varphi} = -GJ_p \frac{\varphi}{l} \,.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \,.$$

Циклическая частота $\omega = \sqrt{GJ_p/Jl}$.

Период колебаний крутильного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{Jl}{GJ_p}} \,.$$

В заключении стоит вспомнить колебательный контур (Рисунок 10), период колебаний которого, согласно формуле Томпсона, равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \,,$$

где L — индуктивность катушки, а C — электроёмкость конденсатора.

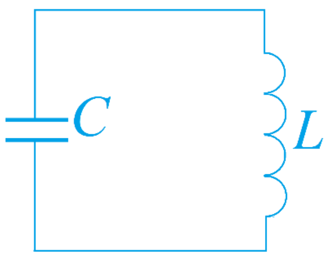

Рисунок 10.

Ю. И. Дорогов

Калининград, 17 сентября 2022 года